

[東京工業大学 1968 年 1]



不等式 $ab+1 \leq abc \leq bc+ca+ab+1$ を満たす自然数 a, b, c のすべての組を求めよ。ただし、 $a > b > c$ とする。



$abc \leq bc+ca+ab+1$ において $a < b < c$ であるから $abc < ab+ab+ab+ab = 4ab$

すなわち $c < 4$ であるから自然数 c は $c = 1, 2, 3$ のいずれかである。

(i) $c = 1$ のとき

$ab+1 \leq abc$ を満たさないので不適。

(ii) $c = 2$ のとき

$$abc \leq bc+ca+ab+1 \text{ より } 2ab \leq 2b+2a+ab+1 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) \leq 5$$

$$a > b > 2 \text{ より } b \geq 3, a \geq 4 \text{ であるから } b = 3, a = 4, 5, 6, 7$$

である。

(iii) $c = 3$ のとき

$$abc \leq bc+ca+ab+1 \text{ より } 3ab \leq 3b+3a+ab+1 \Leftrightarrow 2ab-3a-3b-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-3)(2b-3) \leq 11$$

となるが、 $b \geq 4$ より $2b-3 \geq 5$ かつ $2a-3 \geq 7$ なので成り立たない。

(i), (ii), (iii)より $(a, b, c) = (4, 3, 2), (5, 3, 2), (6, 3, 2), (7, 3, 2)$