[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{1}$ ]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$n$ が正の整数のとき，$|\sin x|^n+|\cos x|^n=1$ を満たす $x$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

（ⅰ）$n=2$ のとき

$|\sin x|^2+|\cos x|^2=\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より任意の $x$ で成り立つ。

（ⅱ）$n\neq 2$ のとき

$x=\dfrac{k}{2}\pi$ （$k$ は整数）に対して

$(\sin x,\ \cos x)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ のいずれかであるから

$|\sin x|^n+|\cos x|^n=1$ は成り立つ。

$x\neq\dfrac{k}{2}\pi$ のときは，$0<|\sin x|<1$，$0<|\cos x|<1$ であるから

$|\sin x|^2<|\sin x|$，$|\cos x|^2<|\cos x|$ より，

辺々加えて $|\sin x|^2+|\cos x|^2<|\sin x|+|\cos x| \Leftrightarrow 1<|\sin x|+|\cos x|$ となり

$n=1$ では解をもたない。

さらに，$|\sin x|^n<|\sin x|^2,\ |\cos x|^n<|\cos x|^2$ より

辺々加えて $|\sin x|^n+|\cos x|^n<|\sin x|^2+|\cos x|^2=1$ となり

$n\geqq 3$ でも解をもたない。

以上より $n=2$ のときは，任意の $x$ が解となり，

$n\neq 2$ のときは，$x=\dfrac{k}{2}\pi$ （$k$ は整数）が解となる。

**[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{2}$ ]**

☆―――☆

点$\mathrm{P}(2, 1)$を通り，だ円（長円） $3x^2+2y^2=6$ と 2 点$\mathrm{Q}, \mathrm{R}$で交わる直線を引く。このとき，積 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$のとりうる値の範囲を定めよ。

☆―――☆

$\mathrm{P}$を中心とする極座標で表すと

$x=2+r\cos\theta$， $y=1+r\sin\theta$

となる。このとき，

$3x^2+2y^2=6 \iff 3(2+r\cos\theta)^2+2(1+r\sin\theta)^2=6$

$\iff 3r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta+12r\cos\theta+4r\sin\theta+8=0$

$\iff (2+\cos^2\theta)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\theta)r+8=0$ …①

$\mathrm{P}$は楕円の外にあるから，$\mathrm{Q}, \mathrm{R}$は$\mathrm{P}$に関して同じ側にある。

したがって，半直線 $\theta=\alpha$ と$\mathrm{Q}, \mathrm{R}$との交点について考えればよい。

$(2+\cos^2\alpha)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\alpha)r+8=0$ の 2 解を$r_1, r_2$とすると

解と係数の関係より

$$\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}=r_1r_2=\frac{8}{2+\cos^2\alpha}$$

①と直線$\theta=\alpha$ とが異なる 2 点で交わるための条件は

$f(r)=(2+\cos^2\alpha)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\alpha)r+8$

$f(r)=0$の判別式について $(6\cos\alpha+2\sin\alpha)^2-8(2+\cos^2\alpha)>0$ …②

となることである。

② $\iff 4(3\cos\alpha+\sin\alpha)^2-8(2+\cos^2\alpha)>0$

$\iff 28\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha-16>0$

$\iff 28\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha-16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)>0$

$\iff 12\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha-12\sin^2\alpha>0$

$\iff \cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha>0$ …③

$\cos^2\alpha\neq 0$ で割って $t=\tan\alpha$ とおくと $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ であり

③ $\Leftrightarrow$ $1+2t-t^2>0$ $\Leftrightarrow$ $1-\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$ となる。

よって $0 \leqq t^2 < 3+2\sqrt{2}$ …④

したがって $r_1 r_2 = \dfrac{8}{2+\dfrac{1}{1+t^2}}$ であるが，④より $\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}} < \dfrac{1}{1+t^2} \leqq 1$ なので

$$\frac{8}{2+1} \leqq r_1 r_2 < \frac{8}{2+\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}}} \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leqq r_1 r_2 < \frac{16\left(10+\sqrt{2}\right)}{49}$$

よって $\dfrac{8}{3} \leqq \overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{PR}} < \dfrac{16\left(10+\sqrt{2}\right)}{49}$

**[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{3}$ ]**

$C_0=0,\ C_1=1,\ C_{n+1}=C_n+C_{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列$\{C_n\}$がある。2 次方程式

$$x^2-(C_{n+1}+C_{n-1})x+(C_{n+1}C_{n-1}-C_n{}^2)=0$$

の 2 根を $\alpha_n,\ \beta_n$ とする。ただし，$\alpha_n \geqq \beta_n$ とする。このとき

(1) $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},\ \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$ を求めよ。

(2) $\alpha_n,\ \beta_n$ を求めよ。

---

(1) 漸化式のていぎから $C_n \geqq 0$ であることは明らか。

解の公式で 2 次方程式を解くと，$\alpha_n \geqq \beta_n$ より

$$\alpha_n=\frac{C_{n+1}+C_{n-1}+\sqrt{\left(C_{n+1}+C_{n-1}\right)^2-4\left(C_{n+1}C_{n-1}-C_n{}^2\right)}}{2}$$

$$=\frac{C_n+C_{n-1}+C_{n-1}+\sqrt{\left(C_{n+1}-C_{n-1}\right)^2+4C_n{}^2}}{2}$$

$$=\frac{C_n+2C_{n-1}+\sqrt{\left(C_n\right)^2+4C_n{}^2}}{2}$$

$$=\frac{C_n+2C_{n-1}+\sqrt{5}C_n}{2}$$

$$=C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n$$

したがって，$n\to n+1$ として

$$\alpha_{n+1}=C_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n+1}$$

$$=C_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(C_n+C_{n-1}\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}C_n$$

となるから

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

同様にして $\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

⑵ $\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるから $\alpha_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \beta_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ となる。

[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{4}$ ]

☆────────────────────────────────────☆

関数 $f(x)=3(\sin x-\cos x)-\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

$f(x)=3(\sin x-\cos x)-\cos 2x=3\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos 2x$

$x-\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと

$f(x)=g(t)=3\sqrt{2}\sin t-\cos 2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\sin t-\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sqrt{2}\sin t+\sin 2t$

$g'(t)=3\sqrt{2}\cos t+2\cos 2t=3\sqrt{2}\cos t+2(2\cos^2 t-1)=\left(4\cos t-\sqrt{2}\right)\left(\cos t+\sqrt{2}\right)$

$-1\leqq\cos t\leqq 1$ において $f'(t)=0$ となるのは $\cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

このときの $t$ を $\alpha$ とおく。すなわち $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ （$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）とすると $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$g(t)$ の増減は下表に従う。$g(t)$ の周期は $2\pi$ なので $0\leqq t\leqq 2\pi$ で考えれば十分である。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $2\pi-\alpha$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | ＋ | ＋ | $0$ | － | $0$ | ＋ | ＋ |
| $g(t)$ | | ↗ | 最大 | ↘ | 最小 | ↗ | |

よって $f(x)$ の最大値は $g(\alpha)=3\sqrt{2}\sin\alpha+\sin 2\alpha$

$$=3\sqrt{2}\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{7\sqrt{7}}{4}$$

$f(x)$ の最小値は $g(2\pi-\alpha)=3\sqrt{2}\sin(2\pi-\alpha)+\sin 2(2\pi-\alpha)$

$$=-g(\alpha)$$

$$=-\frac{7\sqrt{7}}{4}$$

となる。

[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{5}$ ]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\alpha, \beta$ が方程式 $2x = \tan x$ の異なる正の 2 根であるとき，次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \sin\alpha x \sin\beta x\, dx$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\sin\alpha x \sin\beta x = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\}$ であるから

$$\int_0^1 \sin\alpha x \sin\beta x\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \{\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\}\, dx \quad \cdots①$$

$\alpha \neq \beta$，$\alpha,\ \beta > 0$ より $\alpha+\beta \neq 0,\ \alpha-\beta \neq 0$ なので

$$① = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x - \frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\alpha-\beta}\right) \quad \cdots②$$

ここで，$\alpha$ が方程式 $2x = \tan x$ の根であることから

$$2\alpha = \tan\alpha \iff 2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \iff 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$$

同様にして $2\beta\cos\beta = \sin\beta$ となるので

$$② = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot 2\beta\cos\beta}{\alpha+\beta} - \frac{2\alpha\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot 2\beta\cos\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta}{\alpha+\beta} - \frac{2(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$= 0$$

[ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{6}$ ]

☆─────────────────────────────────☆

放物線 $y=-2x^2+x+1$ 上の 1 点における接線と放物線 $y=x^2$ とによって囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

☆─────────────────────────────────☆

$y=-2x^2+x+1$ …①

①より $y'=-4x+1$

①上の点 $(p,\,-2p^2+p+1)$ における接線の方程式は

$y-(-2p^2+p+1)=(-4p+1)(x-p) \Leftrightarrow y=(-4p+1)x+2p^2+1$ …②

②と $y=x^2$ を連立して $x^2-(-4p+1)x-2p^2-1=0$

この 2 次方程式の判別式は $(-4p+1)^2-4(-2p^2-1)=(-4p+1)^2+4(2p^2+1)>0$ より

必ず異なる 2 点で交わる。その 2 点の $x$ 座標を $\alpha,\,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-4p+1,\ \alpha\beta=-2p^2-1$ …③

したがって，題意の面積を $S(p)$ とすると

$$S(p)=\int_\alpha^\beta\{(-4p+1)x+2p^2+1-x^2\}\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

（③，④より） $$=\frac{1}{6}\left\{(-4p+1)^2-4(-2p^2-1)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{24p^2-8p+5\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{24\left(p-\frac{1}{6}\right)+\frac{13}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

よって $p=\dfrac{1}{6}$ のときに最小となり，最小値は $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{13}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}$