[東京工業大学 1967 年 $\boxed{6}$]

放物線 $y=-2x^2+x+1$ 上の 1 点における接線と放物線 $y=x^2$ とによって囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

$y=-2x^2+x+1$ …①

①より $y'=-4x+1$

①上の点 $(p,\ -2p^2+p+1)$ における接線の方程式は

$y-(-2p^2+p+1)=(-4p+1)(x-p) \Leftrightarrow y=(-4p+1)x+2p^2+1$ …②

②と $y=x^2$ を連立して $x^2-(-4p+1)x-2p^2-1=0$

この 2 次方程式の判別式は $(-4p+1)^2-4(-2p^2-1)=(-4p+1)^2+4(2p^2+1)>0$ より

必ず異なる 2 点で交わる。その 2 点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする。

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-4p+1,\ \alpha\beta=-2p^2-1$ …③

したがって，題意の面積を $S(p)$ とすると

$$S(p)=\int_\alpha^\beta\{(-4p+1)x+2p^2+1-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}$$

（③，④より） $$=\frac{1}{6}\left\{(-4p+1)^2-4(-2p^2-1)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{24p^2-8p+5\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{24\left(p-\frac{1}{6}\right)+\frac{13}{3}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

よって $p=\frac{1}{6}$ のときに最小となり，最小値は $\frac{1}{6}\left(\frac{13}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{13\sqrt{39}}{54}$