[東京工業大学 1967 年 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

α, β が方程式 $2x = \tan x$ の異なる正の 2 根であるとき，次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \sin\alpha x \sin\beta x \, dx$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\sin\alpha x \sin\beta x = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\}$ であるから

$\displaystyle\int_0^1 \sin\alpha x \sin\beta x \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \{\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\} dx$ …①

$\alpha \neq \beta$，$\alpha,\ \beta > 0$ より $\alpha+\beta \neq 0,\ \alpha-\beta \neq 0$ なので

$$① = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x - \frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\alpha-\beta}\right) \quad \cdots ②$$

ここで，α が方程式 $2x = \tan x$ の根であることから

$2\alpha = \tan\alpha \iff 2\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \iff 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$

同様にして $2\beta\cos\beta = \sin\beta$ となるので

$$② = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot 2\beta\cos\beta}{\alpha+\beta} - \frac{2\alpha\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot 2\beta\cos\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta}{\alpha+\beta} - \frac{2(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= -\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$= 0$$