[東京工業大学 1967 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

関数　$f(x)=3(\sin x-\cos x)-\cos 2x$　の最大値と最小値を求めよ。

☆ ☆

$f(x)=3(\sin x-\cos x)-\cos 2x=3\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos 2x$

$x-\dfrac{\pi}{4}=t$　とおくと

$f(x)=g(t)=3\sqrt{2}\sin t-\cos 2\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\sin t-\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\sqrt{2}\sin t+\sin 2t$

$g'(t)=3\sqrt{2}\cos t+2\cos 2t=3\sqrt{2}\cos t+2(2\cos^2 t-1)=\left(4\cos t-\sqrt{2}\right)\left(\cos t+\sqrt{2}\right)$

$-1\leqq\cos t\leqq 1$　において　$f'(t)=0$　となるのは　$\cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

このときの　t　を　α　とおく。すなわち　$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　（$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$）とすると　$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$g(t)$ の増減は下表に従う。$g(t)$ の周期は 2π なので　$0\leqq t\leqq 2\pi$　で考えれば十分である。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$g'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$g(t)$		↗	最大	↘	最小	↗	

よって　$f(x)$ の最大値は　$g(\alpha)=3\sqrt{2}\sin\alpha+\sin 2\alpha$

$$=3\sqrt{2}\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{7\sqrt{7}}{4}$$

$f(x)$ の最小値は　$g(2\pi-\alpha)=3\sqrt{2}\sin(2\pi-\alpha)+\sin 2(2\pi-\alpha)$

$$=-g(\alpha)$$

$$=-\frac{7\sqrt{7}}{4}$$

となる。