[東京工業大学 1967 年 $\boxed{3}$]

☆ ――――――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

$C_0=0,\ C_1=1,\ C_{n+1}=C_n+C_{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列$\{C_n\}$がある。2 次方程式

$$x^2-(C_{n+1}+C_{n-1})x+(C_{n+1}C_{n-1}-C_n{}^2)=0$$

の 2 根を $\alpha_n,\ \beta_n$ とする。ただし，$\alpha_n \geqq \beta_n$ とする。このとき

(1) $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},\ \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$ を求めよ。

(2) $\alpha_n,\ \beta_n$ を求めよ。

☆ ――――――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

(1) 漸化式のていぎから $C_n \geqq 0$ であることは明らか。

解の公式で 2 次方程式を解くと，$\alpha_n \geqq \beta_n$ より

$$\alpha_n=\frac{C_{n+1}+C_{n-1}+\sqrt{\left(C_{n+1}+C_{n-1}\right)^2-4\left(C_{n+1}C_{n-1}-C_n{}^2\right)}}{2}$$

$$=\frac{C_n+C_{n-1}+C_{n-1}+\sqrt{\left(C_{n+1}-C_{n-1}\right)^2+4C_n{}^2}}{2}$$

$$=\frac{C_n+2C_{n-1}+\sqrt{\left(C_n\right)^2+4C_n{}^2}}{2}$$

$$=\frac{C_n+2C_{n-1}+\sqrt{5}C_n}{2}$$

$$=C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n$$

したがって，$n \to n+1$ として

$$\alpha_{n+1}=C_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n+1}$$

$$=C_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(C_n+C_{n-1}\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}C_n$$

となるから

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{C_{n-1}+\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}{C_{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_n}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

同様にして $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(2) $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるから $\alpha_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \beta_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ となる。