[東京工業大学 1967 年 $\boxed{2}$]

☆────────────────────────☆

点 $\mathrm{P}(2, 1)$ を通り，だ円（長円） $3x^2+2y^2=6$ と 2 点 $\mathrm{Q, R}$ で交わる直線を引く。このとき，積 $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}$ のとりうる値の範囲を定めよ。

☆────────────────────────☆

P を中心とする極座標で表すと

$x=2+r\cos\theta$， $y=1+r\sin\theta$

となる。このとき，

$3x^2+2y^2=6 \iff 3(2+r\cos\theta)^2+2(1+r\sin\theta)^2=6$

$\iff 3r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta+12r\cos\theta+4r\sin\theta+8=0$

$\iff (2+\cos^2\theta)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\theta)r+8=0 \quad \cdots①$

P は楕円の外にあるから， $\mathrm{Q, R}$ は P に関して同じ側にある。

したがって，半直線 $\theta=\alpha$ と $\mathrm{Q, R}$ との交点について考えればよい。

$(2+\cos^2\alpha)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\alpha)r+8=0$ の 2 解を $r_1,\ r_2$ とすると

解と係数の関係より

$$\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{PR}}=r_1r_2=\frac{8}{2+\cos^2\alpha}$$

①と直線 $\theta=\alpha$ とが異なる 2 点で交わるための条件は

$f(r)=(2+\cos^2\alpha)r^2+(12\cos\alpha+4\sin\alpha)r+8$

$f(r)=0$ の判別式について $(6\cos\alpha+2\sin\alpha)^2-8(2+\cos^2\alpha)>0 \quad \cdots②$

となることである。

② $\iff 4(3\cos\alpha+\sin\alpha)^2-8(2+\cos^2\alpha)>0$

$\iff 28\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha-16>0$

$\iff 28\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha-16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)>0$

$\iff 12\cos^2\alpha+24\sin\alpha\cos\alpha-12\sin^2\alpha>0$

$\iff \cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha>0 \quad \cdots③$

$\cos^2\alpha\neq 0$ で割って $t=\tan\alpha$ とおくと $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ であり

③ $\Leftrightarrow$ $1+2t-t^2>0$ $\Leftrightarrow$ $1-\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$ となる。

よって $0 \leqq t^2 < 3+2\sqrt{2}$ …④

したがって $r_1 r_2 = \dfrac{8}{2+\dfrac{1}{1+t^2}}$ であるが，④より $\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}} < \dfrac{1}{1+t^2} \leqq 1$ なので

$$\frac{8}{2+1} \leqq r_1 r_2 < \frac{8}{2+\dfrac{1}{4+2\sqrt{2}}} \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leqq r_1 r_2 < \frac{16\left(10+\sqrt{2}\right)}{49}$$

よって $\dfrac{8}{3} \leqq \overline{\mathrm{PQ}} \cdot \overline{\mathrm{PR}} < \dfrac{16\left(10+\sqrt{2}\right)}{49}$