［ 東京工業大学 1967 年 $\boxed{1}$ ］

☆

n が正の整数のとき，$|\sin x|^n+|\cos x|^n=1$ を満たす x の値を求めよ。

☆

（ⅰ）$n=2$ のとき

$|\sin x|^2+|\cos x|^2=\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より任意の x で成り立つ。

（ⅱ）$n\neq 2$ のとき

$x=\dfrac{k}{2}\pi$ （k は整数）に対して

$(\sin x,\ \cos x)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ のいずれかであるから

$|\sin x|^n+|\cos x|^n=1$ は成り立つ。

$x\neq\dfrac{k}{2}\pi$ のときは，$0<|\sin x|<1$，$0<|\cos x|<1$ であるから

$|\sin x|^2<|\sin x|$，$|\cos x|^2<|\cos x|$ より，

辺々加えて $|\sin x|^2+|\cos x|^2<|\sin x|+|\cos x| \Leftrightarrow 1<|\sin x|+|\cos x|$ となり

$n=1$ では解をもたない。

さらに，$|\sin x|^n<|\sin x|^2,\ |\cos x|^n<|\cos x|^2$ より

辺々加えて $|\sin x|^n+|\cos x|^n<|\sin x|^2+|\cos x|^2=1$ となり

$n\geqq 3$ でも解をもたない。

以上より $n=2$ のときは，任意の x が解となり，

$n\neq 2$ のときは，$x=\dfrac{k}{2}\pi$ （k は整数）が解となる。