[東京工業大学 1966 年 $\boxed{1}$]

☆――☆

(1) 円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ の中心O と異なる点$\mathrm{P}(x,\ y)$がある。この円の半径をrとし，線分OPまたはそのPをこえる延長上に１点Qをとり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるようにする。このとき点Qの座標$(X,\ Y)$を求めよ。

(2) 問(1)において点Pがx軸の全体を動くとき，対応する点Qはどんな図形をえがくか。

☆――☆

(1) $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$ より

中心 $\mathrm{O}(2,\ -1)$，半径 $r=2$ である。

O' を原点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{O'Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ -1)+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\quad\cdots①$$

であり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2=4$ から $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=4$ なので

$$①=(2,\ -1)+\frac{4\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}$$

$$=(2,\ -1)+\frac{4}{(x-2)^2+(y+1)^2}(x-2,\ y+1)$$

$$=\left(2+\frac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2},\ -1+\frac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\right)$$

となる。

よって $\mathrm{Q}\left(2+\dfrac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2},\ -1+\dfrac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\right)$

(2) 点Pがx軸の全体を動くとき，$-\infty<x<\infty,\ y=0$ である。

このとき，$X=2+\dfrac{4(x-2)}{(x-2)^2+1^2}\ \cdots②$，$Y=-1+\dfrac{4}{(x-2)^2+1}\ \cdots③$

③より $\dfrac{1}{(x-2)^2+1}=\dfrac{Y+1}{4}$ を②に代入すると

$X=2+(x-2)(Y+1)$

③より $Y\neq-1$ なので $x-2=\dfrac{X-2}{Y+1}\ \cdots②'$

②´を③に代入して

$$Y=-1+\frac{4}{\left(\frac{X-2}{Y+1}\right)^2+1} \iff Y+1=\frac{4(Y+1)^2}{\left(X-2\right)^2+(Y+1)^2}$$

$$\iff 1=\frac{4(Y+1)}{\left(X-2\right)^2+(Y+1)^2}$$

$$\iff \left(X-2\right)^2+(Y+1)^2=4(Y+1)$$

$$\iff \left(X-2\right)^2+(Y-1)^2=4$$

③より　$Y>-1$

よって　Q は 円$\left(x-2\right)^2+(y-1)^2=4$　上を動く。ただし，$(2,-1)$ を除く。

[東京工業大学 1966 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

二次方程式 $2x^2-2px+q=0$ において，$p>1,\ 1-2p+2q \geqq 0$ とする。この方程式が 2 つの実根 α, β をもち，2 つの数列 $\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^n\right\}, \left\{\left(\dfrac{4\beta^2}{\alpha}\right)^n\right\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は収束するという。p, q の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

解と係数の関係より $\alpha+\beta=p$ …①，$\alpha\beta=\dfrac{q}{2}$ …②

$p>1$ …③ より ①から $\alpha+\beta>1$ …④

また，$1-2p+2q \geqq 0$ …⑤ より $2q \geqq 2p-1>0$ なので $q>0$

よって②より $\alpha\beta>0$，④と合わせて $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となる。

$\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^n\right\}, \left\{\left(\dfrac{4\beta^2}{\alpha}\right)^n\right\}$ が収束するための条件は

$-1<\dfrac{\alpha}{2\beta} \leqq 1$ …⑥ かつ $-1<\dfrac{4\beta^2}{\alpha} \leqq 1$ …⑦

である。

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ より ⑥，⑦は $0<\alpha \leqq 2\beta$ …⑥´，$4\beta^2 \leqq \alpha$ …⑦´ となる。

また，$1-2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta=(1-2\alpha)(1-2\beta) \geqq 0$ なので

「 $0<\alpha \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $0<\beta \leqq \dfrac{1}{2}$ 」または「 $\alpha \geqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\beta \geqq \dfrac{1}{2}$ 」

とがるが，④より「 $0<\alpha \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $0<\beta \leqq \dfrac{1}{2}$ 」は不適。

さらに，⑥´，⑦´であるから $4\beta^2 \leqq 2\beta$ より $\beta \leqq \dfrac{1}{2}$ なので $\beta=\dfrac{1}{2}$

このときさらに，⑥´，⑦´より $1 \leqq \alpha \leqq 1$ なので $\alpha=1$

よって①，②より $p=\dfrac{3}{2}$，$q=1$

[東京工業大学 1966 年 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────☆

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>0,\ q>0$ のとき， $x \geqq 0$ において， x と $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}$ との大小を比較せよ。

☆────────────────────────☆

$f(x)=\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}-x$ とおくと $f'(x)=x^{p-1}-1$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>0,\ q>0$ より $0<\dfrac{1}{p}<1$ であり， $p>1$ である。

よって $x \geqq 0$ において $f'(x)=0$ となるのは $x^{p-1}=1$ より $x=1$

$p-1>0$ であるから $0 \leqq x<1$ において $f'(x)<0$， $x>1$ において $f'(x)>0$

したがって $f(x)$ は $x=1$ で最小値 $f(1)=0$ をとるので $f(x) \geqq 0$ である。

よって $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q} \geqq x$

[東京工業大学 1966 年 $\boxed{4}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

2 つの放物線 $y=x^2+ax+b,\ y=x^2+cx+d\ (a\neq c)$ の共通接線とこれらの放物線との接点の x 座標を $p,\ q$ とする。この接線と上の 2 つの放物線とで囲まれた部分の面積を $p,\ q$ で表せ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$y=x^2+ax+b$ …①, $y=x^2+cx+d$ …② とし，共通接線を $\ell : y=mx+n$ とおく。

①と $x=p$ で接し，②と $x=q$ で接することから

$$x^2+ax+b-(mx+n)=(x-p)^2,\quad x^2+cx+d-(mx+n)=(x-q)^2$$

となるので，係数を比較して

$$a-m=-2p \ \cdots③,\quad b-n=p^2 \ \cdots④,\quad c-m=-2q \ \cdots⑤,\quad d-n=q^2 \ \cdots⑥$$

①，②の交点の x 座標は

$$x^2+ax+b=x^2+cx+d \quad \text{より} \quad x=\frac{b-d}{c-a} \ \cdots⑦$$

⑤－③より $c-a=2(p-q)$

④－⑥より $b-d=(p+q)(p-q)$

よって⑦は $x=\dfrac{b-d}{c-a}=\dfrac{(p+q)(p-q)}{2(p-q)}=\dfrac{p+q}{2}$ となる。

$p<q$ として考えると，③，④，⑤，⑥より求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}\{(x^2+ax+b)-(mx+n)\}\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}\{(x^2+cx+d)-(mx+n)\}\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}\{x^2+(a-m)x+b-n\}\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}\{x^2+(c-m)x+d-n\}\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}(x^2-2px+p^2)\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}(x^2-2qx+q^2)\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}(x-p)^2\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^{q}(x-q)^2\,dx\\
&=\frac{1}{3}\Big[(x-p)^3\Big]_p^{\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{\frac{p+q}{2}}^{q}\\
&=\frac{1}{24}(-p+q)^3-\frac{1}{24}(p-q)^3\\
&=\frac{1}{12}(q-p)^3
\end{aligned}$$

$q<p$ の場合も考えて $S=\dfrac{1}{12}|q-p|^3$ となる。

[東京工業大学 1966 年 $\boxed{5}$]

☆――☆

相異なる 3 つの複素数がある。これらのうちから重複を許してとったどの 2 つの積も，これら 3 つのどれかであるという。3 組の数を求めよ。

☆――☆

相異なる 3 つの複素数を α, β, γ とおく。

集合 $S_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ とする。

（ｉ）$\alpha\beta\gamma \neq 0$ のとき

集合 $S_2 = \{\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma\}$ とすると，$\alpha\beta\gamma \neq 0$ より $S_1 = S_2$ であるから

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha^2 \cdot \alpha\beta \cdot \alpha\gamma$ すなわち $\alpha\beta\gamma = \alpha^4\beta\gamma$ が成り立つ。

$\alpha\beta\gamma \neq 0$ であるから $\alpha^3 = 1$

よって $\alpha = 1, \omega, \omega^2$ となり，3 つの複素数は $\{1, \omega, \omega^2\}$

（ⅱ）$\alpha\beta\gamma = 0$ のとき

$\alpha = 0$ とすると $\beta\gamma \neq 0$ であり，$\beta\gamma = \beta$（または $\beta\gamma = \gamma$）となる。

よって $\gamma = 1$ であり，$\beta \neq 0, 1$ なので $\beta^2 = 1$ である。

したがって $\beta = -1$ となるので，3 つの複素数は $\{0, 1, -1\}$

$\beta\gamma = \gamma$ のときも同様である。

よって，求める 3 数の組は $\{1, \omega, \omega^2\}$，$\{0, 1, -1\}$

[東京工業大学 1966 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx$$

☆ ☆

$I=\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx$ とおく。部分積分により

$$I=\int_0^{\pi}(e^x)' x\sin x\,dx$$

$$=\left[e^x x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\sin x+x\cos x)\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\int_0^{\pi} e^x x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\int_0^{\pi}(e^x)' x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\left\{\left[e^x x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\cos x-x\sin x)\,dx\right\}$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\left\{-e^{\pi}\pi-\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi}(-e^x x\sin x)\,dx\right\}$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+e^{\pi}\pi+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi} e^x x\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+e^{\pi}\pi+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-I$$

となるので

$2I=e^{\pi}\pi-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$ を得る。

ここで, $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx=\left[e^x \cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^x \sin x)\,dx$ であるから

$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx=-e^{\pi}-1$ なので

$$2I=e^{\pi}\pi-e^{\pi}-1$$

したがって $I=\dfrac{e^{\pi}\pi-e^{\pi}-1}{2}$