[東京工業大学 1966 年 $\boxed{6}$]

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx$$

$I=\int_0^{\pi} xe^x \sin x\,dx$ とおく。部分積分により

$$I=\int_0^{\pi}(e^x)' x\sin x\,dx$$

$$=\Big[e^x x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\sin x+x\cos x)\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\int_0^{\pi} e^x x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\int_0^{\pi}(e^x)' x\cos x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\left\{\Big[e^x x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x(\cos x-x\sin x)\,dx\right\}$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx-\left\{-e^{\pi}\pi-\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi}(-e^x x\sin x)\,dx\right\}$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+e^{\pi}\pi+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi} e^x x\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+e^{\pi}\pi+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-I$$

となるので

$2I=e^{\pi}\pi-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx+\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$ を得る。

ここで，$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx=\Big[e^x \cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^x \sin x)\,dx$ であるから

$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx-\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx=-e^{\pi}-1$ なので

$$2I=e^{\pi}\pi-e^{\pi}-1$$

したがって $I=\dfrac{e^{\pi}\pi-e^{\pi}-1}{2}$