

[ 東京工業大学 1966 年 5 ]



相異なる 3 つの複素数がある。これらのうちから重複を許してとったどの 2 つの積も、これら 3 つのどれかであるという。3 組の数を求めよ。



相異なる 3 つの複素数を  $\alpha, \beta, \gamma$  とおく。

集合  $S_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  とする。

(i)  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  のとき

集合  $S_2 = \{\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma\}$  とすると、 $\alpha\beta\gamma \neq 0$  より  $S_1 = S_2$  であるから

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \alpha^2 \cdot \alpha\beta \cdot \alpha\gamma$  すなわち  $\alpha\beta\gamma = \alpha^4\beta\gamma$  が成り立つ。

$\alpha\beta\gamma \neq 0$  であるから  $\alpha^3 = 1$

よって  $\alpha = 1, \omega, \omega^2$  となり、3 つの複素数は  $\{1, \omega, \omega^2\}$

(ii)  $\alpha\beta\gamma = 0$  のとき

$\alpha = 0$  とすると  $\beta\gamma \neq 0$  であり、 $\beta\gamma = \beta$  (または  $\beta\gamma = \gamma$ ) となる。

よって  $\gamma = 1$  であり、 $\beta \neq 0, 1$  なので  $\beta^2 = 1$  である。

したがって  $\beta = -1$  となるので、3 つの複素数は  $\{0, 1, -1\}$

$\beta\gamma = \gamma$  のときも同様である。

よって、求める 3 数の組は  $\{1, \omega, \omega^2\}, \{0, 1, -1\}$