[東京工業大学 1966 年 $\boxed{4}$]

2 つの放物線 $y=x^2+ax+b,\ y=x^2+cx+d\ (a\neq c)$ の共通接線とこれらの放物線との接点の x 座標を $p,\ q$ とする。この接線と上の 2 つの放物線とで囲まれた部分の面積を $p,\ q$ で表せ。

$y=x^2+ax+b$ …①，$y=x^2+cx+d$ …② とし，共通接線を $\ell: y=mx+n$ とおく。

①と $x=p$ で接し，②と $x=q$ で接することから

$$x^2+ax+b-(mx+n)=(x-p)^2,\quad x^2+cx+d-(mx+n)=(x-q)^2$$

となるので，係数を比較して

$$a-m=-2p\ \cdots③,\quad b-n=p^2\ \cdots④,\quad c-m=-2q\ \cdots⑤,\quad d-n=q^2\ \cdots⑥$$

①，②の交点の x 座標は

$$x^2+ax+b=x^2+cx+d \text{ より } x=\frac{b-d}{c-a}\ \cdots⑦$$

⑤－③より $c-a=2(p-q)$

④－⑥より $b-d=(p+q)(p-q)$

よって⑦は $x=\dfrac{b-d}{c-a}=\dfrac{(p+q)(p-q)}{2(p-q)}=\dfrac{p+q}{2}$ となる。

$p<q$ として考えると，③，④，⑤，⑥より求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}\{(x^2+ax+b)-(mx+n)\}\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^q\{(x^2+cx+d)-(mx+n)\}\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}\{x^2+(a-m)x+b-n\}\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^q\{x^2+(c-m)x+d-n\}\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}(x^2-2px+p^2)\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^q(x^2-2qx+q^2)\,dx\\
&=\int_p^{\frac{p+q}{2}}(x-p)^2\,dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^q(x-q)^2\,dx\\
&=\frac{1}{3}\Big[(x-p)^3\Big]_p^{\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{\frac{p+q}{2}}^q\\
&=\frac{1}{24}(-p+q)^3-\frac{1}{24}(p-q)^3\\
&=\frac{1}{12}(q-p)^3
\end{aligned}$$

$q<p$ の場合も考えて $S=\dfrac{1}{12}|q-p|^3$ となる。