

[東京工業大学 1966 年 3]



$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 0, q > 0$ のとき, $x \geq 0$ において, x と $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}$ との大小を比較せよ。



$f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x$ とおくと $f'(x) = x^{p-1} - 1$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 0, q > 0$ より $0 < \frac{1}{p} < 1$ であり, $p > 1$ である。

よって $x \geq 0$ において $f'(x) = 0$ となるのは $x^{p-1} = 1$ より $x = 1$

$p-1 > 0$ であるから $0 \leq x < 1$ において $f'(x) < 0$, $x > 1$ において $f'(x) > 0$

したがって $f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $f(1) = 0$ をとるので $f(x) \geq 0$ である。

よって $\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$