[東京工業大学 1966 年 $\boxed{2}$]

☆ ☆

二次方程式 $2x^2-2px+q=0$ において， $p>1,\ 1-2p+2q\geqq 0$ とする。この方程式が 2 つの実根α,β をもち，2 つの数列 $\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^n\right\},\left\{\left(\dfrac{4\beta^2}{\alpha}\right)^n\right\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は収束するという。$p,\ q$ の値を求めよ。

☆ ☆

解と係数の関係より $\alpha+\beta=p$ …①， $\alpha\beta=\dfrac{q}{2}$ …②

$p>1$ …③ より ①から $\alpha+\beta>1$ …④

また，$1-2p+2q\geqq 0$ …⑤ より $2q\geqq 2p-1>0$ なので $q>0$

よって②より $\alpha\beta>0$，④と合わせて $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となる。

$\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2\beta}\right)^n\right\},\left\{\left(\dfrac{4\beta^2}{\alpha}\right)^n\right\}$ が収束するための条件は

$-1<\dfrac{\alpha}{2\beta}\leqq 1$ …⑥ かつ $-1<\dfrac{4\beta^2}{\alpha}\leqq 1$ …⑦

である。

$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ より ⑥，⑦は $0<\alpha\leqq 2\beta$ …⑥´， $4\beta^2\leqq\alpha$ …⑦´ となる。

また，$1-2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta=(1-2\alpha)(1-2\beta)\geqq 0$ なので

「 $0<\alpha\leqq\dfrac{1}{2}$ かつ $0<\beta\leqq\dfrac{1}{2}$ 」または「 $\alpha\geqq\dfrac{1}{2}$ かつ $\beta\geqq\dfrac{1}{2}$ 」

とがるが，④より「 $0<\alpha\leqq\dfrac{1}{2}$ かつ $0<\beta\leqq\dfrac{1}{2}$ 」は不適。

さらに，⑥´，⑦´であるから $4\beta^2\leqq 2\beta$ より $\beta\leqq\dfrac{1}{2}$ なので $\beta=\dfrac{1}{2}$

このときさらに，⑥´，⑦´より $1\leqq\alpha\leqq 1$ なので $\alpha=1$

よって①，②より $p=\dfrac{3}{2}$， $q=1$