[東京工業大学 1966 年 $\boxed{1}$]

☆ ☆

(1) 円 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ の中心Oと異なる点$\mathrm{P}(x,\ y)$がある。この円の半径をrとし，線分OPまたはそのPをこえる延長上に1点Qをとり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるようにする。このとき点Qの座標$(X,\ Y)$を求めよ。

(2) 問(1)において点Pがx軸の全体を動くとき，対応する点Qはどんな図形をえがくか。

☆ ☆

(1) $x^2+y^2-4x+2y+1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$ より

中心 $\mathrm{O}(2,\ -1)$，半径 $r=2$ である。

O´ を原点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{O'Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O'O}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ -1)+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\quad\cdots①$$

であり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2=4$ から $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=4$ なので

$$①=(2,\ -1)+\frac{4\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}$$

$$=(2,\ -1)+\frac{4}{(x-2)^2+(y+1)^2}(x-2,\ y+1)$$

$$=\left(2+\frac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2},\ -1+\frac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\right)$$

となる。

よって $\mathrm{Q}\left(2+\frac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2},\ -1+\frac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}\right)$

(2) 点Pがx軸の全体を動くとき，$-\infty<x<\infty,\ y=0$ である。

このとき，$X=2+\frac{4(x-2)}{(x-2)^2+1^2}\ \cdots②$，$Y=-1+\frac{4}{(x-2)^2+1}\ \cdots③$

③より $\frac{1}{(x-2)^2+1}=\frac{Y+1}{4}$ を②に代入すると

$X=2+(x-2)(Y+1)$

③より $Y\neq -1$ なので $x-2=\frac{X-2}{Y+1}\ \cdots②´$

②´ を③に代入して

$$Y=-1+\frac{4}{\left(\frac{X-2}{Y+1}\right)^2+1} \Leftrightarrow Y+1=\frac{4(Y+1)^2}{\left(X-2\right)^2+(Y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{4(Y+1)}{\left(X-2\right)^2+(Y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(X-2\right)^2+(Y+1)^2=4(Y+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(X-2\right)^2+(Y-1)^2=4$$

③より $Y>-1$

よって Q は 円$\left(x-2\right)^2+(y-1)^2=4$ 上を動く。ただし，$(2,-1)$ を除く。