[東京工業大学 1965 年 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

平面上に$\mathrm{A}(2,\ 7)$と$\mathrm{B}(13,\ 0)$と直線 $x+y-5=0$ が与えられている。この直線上に 1 点Pをとって

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$を最小にしたい。Pの座標を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

$\ell : x+y-5=0$ とする。2 点$\mathrm{A},\ \mathrm{B}$はℓの同じ側にある。

ℓに関してAと対称な点を$\mathrm{A}'(s,\ t)$とおく。

$\mathrm{AA}'\perp\ell$ であることから $\dfrac{t-7}{s-2}\cdot(-1)=-1 \iff s-t=-5$ …①

また，$\mathrm{A},\ \mathrm{A}'$ の中点はℓ上にあるので，$\dfrac{2+s}{2}+\dfrac{7+t}{2}-5=0 \iff s+t=1$ …②

①，②より $s=-2,\ t=3$ なので $\mathrm{A}'(-2,\ 3)$

$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$が最小となるのはPが直線$\mathrm{A}'\mathrm{B}$とℓの交点となるときである。

直線$\mathrm{A}'\mathrm{B}$の方程式は $y=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{13}{5}$ であるから，ℓと連立して $x=3,\ y=2$

よって $\mathrm{P}(3,\ 2)$

[東京工業大学 1965 年 $\boxed{2}$]

三次方程式 $x^3+ax+b=0$ の 3 根を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とし，$t_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおくとき，at_5+bt_4 を $a,\ b$ で表せ。

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$，$\alpha\beta\gamma=-b$

よって $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2a$

ここで，$ax^5+bx^4=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2x^3-2abx^2-b^2x$

$$=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2(x^3+ax+b)+a^3x+a^2b-2abx^2-b^2x$$

$$=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2(x^3+ax+b)-2abx^2+(a^3-b^2)x+a^2b$$

となることから

$a\alpha^5+b\alpha^4=-2ab\alpha^2+(a^3-b^2)\alpha+a^2b$

$a\beta^5+b\beta^4=-2ab\beta^2+(a^3-b^2)\beta+a^2b$

$a\gamma^5+b\gamma^4=-2ab\gamma^2+(a^3-b^2)\gamma+a^2b$

よって $at_5+bt_4=a(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)+b(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$

$$=-2ab(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(a^3-b^2)(\alpha+\beta+\gamma)+3a^2b$$

$$=4a^2b+3a^2b$$

$$=7a^2b$$

[東京工業大学 1965 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0 \leqq x < \pi,\ 0 \leqq y < \pi,\ \sin 2x + \sin 2y = 1$ のとき，$|x-y|$ を最大または最小にする $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\sin 2x + \sin 2y = 1$ …① より $\sin 2x = 1 - \sin 2y \geqq 0$ から $\sin 2x \geqq 0$

よって $0 \leqq 2x \leqq \pi$ であるから $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ …②

同様にして $0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ …③

①より $2\sin(x+y)\cos(x-y) = 1$ …①´

②，③より $0 \leqq |x-y| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して $\cos\theta$ は単調減少なので

「$|x-y|$が最大 $\Leftrightarrow$ $\cos|x-y|$が最大」，「$|x-y|$が最小 $\Leftrightarrow$ $\cos|x-y|$が最小」である。

ここで，$1 \geqq \cos|x-y|$ …④

$$= \cos(x-y)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin(x+y)}$$

$$\geqq \frac{1}{2} \quad \cdots⑤$$

④の等号成立は $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ のとき，⑤の等号成立は $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ のときである。

④の等号が成立するとき $\cos|x-y|$が最大になるので $|x-y|$ は最小になる。

このとき $x = y$ であり，①´ より $\sin(x+y) = \dfrac{1}{2}$

よって $x + y = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$ から $x = y = \dfrac{1}{12}\pi$ または $x = y = \dfrac{5}{12}\pi$

⑤の等号が成立するとき $\cos(x-y)$ が最小となるので $|x-y|$ は最大になる。

このとき $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ であり，①´ より $\cos(x-y) = \dfrac{1}{2}$

よって $x - y = \pm\dfrac{\pi}{3}$ から $x = \dfrac{5}{12}\pi,\ y = \dfrac{1}{12}\pi$ または $x = \dfrac{1}{12}\pi,\ y = \dfrac{5}{12}\pi$

[東京工業大学 1965 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

次数が 3 をこえない整式 $f(x)$ について

$\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ を $f(0),\ f(h),\ f(-h)$ で表す公式を作れ。

☆ ☆

$f(x)$ は次数が 3 を超えないことなら $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおける。

このとき，$f(0)=d$

$$f(h)=ah^3+bh^2+ch+d \quad \cdots①$$

$$f(-h)=-ah^3+bh^2-ch+d \quad \cdots②$$

である。

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\,dx=\frac{2}{h}\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^h$$

$$=\frac{2}{h}\left[\frac{b}{3}h^3+dh\right]_0^h$$

$$=\frac{2}{3}bh^2+2d$$

$$=\frac{1}{3}(2bh^2+6d)$$

であり，①，②より $f(h)+f(-h)=2bh^2+2d$

さらに $f(0)=d$ より

$$\frac{1}{3}(2bh^2+6d)=\frac{1}{3}(2bh^2+2d+4d)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{f(h)+f(-h)+4f(0)\right\}$$

となる。

[東京工業大学 1965 年 $\boxed{5}$]

☆―――☆

次の不等式を証明せよ。

$$\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx < 2h$$

ただし，$0<h<\pi$ とする。

☆―――☆

$\sin(x+h)-\sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} \left|2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|dx \\ &= 2\sin\frac{h}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx\end{aligned}$$

ここで，$0<h<\pi$ より $0<\dfrac{h}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)dx \\ &= \left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}} - \left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}^{\pi} \\ &= 1-\sin\frac{h}{2}-\left\{\sin\left(\pi+\frac{h}{2}\right)-1\right\} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx &= 2\sin\frac{h}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx \\ &= 2\sin\frac{h}{2}\cdot 2 \\ &= 4\sin\frac{h}{2} \\ &< 4\cdot\frac{h}{2} \\ &= 2h\end{aligned}$$

より題意は成り立つ。

[東京工業大学 1965 年 $\boxed{6}$]

☆ ―――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

t を正の数とし，点 $(t,\ -1)$ より放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線を引く。これらの接線と放物線とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，$\dfrac{S(t)}{\sqrt{t}}$ の最小値を求めよ。

☆ ―――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

$y=x^2$ 上の点 $(s,\ s^2)$ における接線の方程式は $y-s^2=2s(x-s) \iff y=2sx-s^2$

これが $(t,\ -1)$ を通るとき $-1=2st-s^2 \iff s^2-2st-1=0$ …①

①の 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$S(t)=\int_\alpha^t x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\,dx+\int_t^\beta x^2-(2\beta x-\beta^2)\,dx$$

$$=\int_\alpha^t (x-\alpha)^2\,dx+\int_t^\beta (x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^t+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_t^\beta$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(t-\alpha)^3-(t-\beta)^3\right\}$$

①より $\alpha=t-\sqrt{t^2+1},\ \beta=t+\sqrt{t^2+1}$ であるから

$$S(t)=\frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

よって $\dfrac{S(t)}{\sqrt{t}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}}=f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t^{\frac{1}{2}}-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(5t^2-1)}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

$t>0$ において $f(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	最小	↗

よって，　$f(t)$ は　$t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　のとき

最小値　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt[4]{5}}$$

をとる。