[東京工業大学 1965 年 $\boxed{6}$]

tを正の数とし，点$(t,\ -1)$より放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線を引く。これらの接線と放物線とで囲まれた部分の面積を$S(t)$とするとき，$\dfrac{S(t)}{\sqrt{t}}$の最小値を求めよ。

$y=x^2$ 上の点$(s,\ s^2)$における接線の方程式は $y-s^2=2s(x-s)$ $\Leftrightarrow$ $y=2sx-s^2$

これが$(t,\ -1)$を通るとき $-1=2st-s^2$ $\Leftrightarrow$ $s^2-2st-1=0$ $\cdots$①

①の 2 解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると

$$S(t)=\int_\alpha^t x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\,dx+\int_t^\beta x^2-(2\beta x-\beta^2)\,dx$$

$$=\int_\alpha^t (x-\alpha)^2\,dx+\int_t^\beta (x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^t+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_t^\beta$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(t-\alpha)^3-(t-\beta)^3\right\}$$

①より $\alpha=t-\sqrt{t^2+1},\ \beta=t+\sqrt{t^2+1}$ であるから

$$S(t)=\frac{2}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

よって $\dfrac{S(t)}{\sqrt{t}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}}=f(t)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t^{\frac{1}{2}}-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}(5t^2-1)}{2t^{\frac{3}{2}}}$$

$t>0$ において $f(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	最小	↗

よって，　$f(t)$ は　$t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　のとき

最小値　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt[4]{5}}$$

をとる。