[**東京工業大学 1965 年** $\boxed{5}$]

次の不等式を証明せよ。

$$\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx < 2h$$

ただし，$0<h<\pi$ とする。

$\sin(x+h)-\sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} \left|2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right|dx \\ &= 2\sin\frac{h}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx\end{aligned}$$

ここで，$0<h<\pi$ より $0<\dfrac{h}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}^{\pi}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)dx \\ &= \left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}} - \left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}^{\pi} \\ &= 1-\sin\frac{h}{2}-\left\{\sin\left(\pi+\frac{h}{2}\right)-1\right\} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin(x+h)-\sin x|\,dx &= 2\sin\frac{h}{2}\int_0^{\pi}\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|dx \\ &= 2\sin\frac{h}{2}\cdot 2 \\ &= 4\sin\frac{h}{2} \\ &< 4\cdot\frac{h}{2} \\ &= 2h\end{aligned}$$

より題意は成り立つ。