[東京工業大学 1965 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0 \leqq x < \pi,\ 0 \leqq y < \pi,\ \sin 2x + \sin 2y = 1$ のとき，$|x-y|$ を最大または最小にする $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\sin 2x + \sin 2y = 1$ …① より $\sin 2x = 1 - \sin 2y \geqq 0$ から $\sin 2x \geqq 0$

よって $0 \leqq 2x \leqq \pi$ であるから $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ …②

同様にして $0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ …③

①より $2\sin(x+y)\cos(x-y) = 1$ …①´

②，③より $0 \leqq |x-y| \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して $\cos\theta$ は単調減少なので

「$|x-y|$が最大 $\Leftrightarrow$ $\cos|x-y|$が最大」，「$|x-y|$が最小 $\Leftrightarrow$ $\cos|x-y|$が最小」である。

ここで，$1 \geqq \cos|x-y|$ …④

$$= \cos(x-y)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin(x+y)}$$

$$\geqq \frac{1}{2} \quad \cdots⑤$$

④の等号成立は $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ のとき，⑤の等号成立は $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ のときである。

④の等号が成立するとき $\cos|x-y|$が最大になるので $|x-y|$ は最小になる。

このとき $x = y$ であり，①´ より $\sin(x+y) = \dfrac{1}{2}$

よって $x + y = \dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$ から $x = y = \dfrac{1}{12}\pi$ または $x = y = \dfrac{5}{12}\pi$

⑤の等号が成立するとき $\cos(x-y)$ が最小となるので $|x-y|$ は最大になる。

このとき $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ であり，①´ より $\cos(x-y) = \dfrac{1}{2}$

よって $x - y = \pm\dfrac{\pi}{3}$ から $x = \dfrac{5}{12}\pi,\ y = \dfrac{1}{12}\pi$ または $x = \dfrac{1}{12}\pi,\ y = \dfrac{5}{12}\pi$