[東京工業大学 1965 年 $\boxed{2}$]

三次方程式 $x^3+ax+b=0$ の 3 根を$\alpha,\ \beta,\ \gamma$とし，$t_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおくとき，at_5+bt_4を$a,\ b$で表せ。

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$，$\alpha\beta\gamma=-b$

よって $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2a$

ここで，$ax^5+bx^4=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2x^3-2abx^2-b^2x$

$$=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2(x^3+ax+b)+a^3x+a^2b-2abx^2-b^2x$$

$$=(x^3+ax+b)(ax^2+bx)-a^2(x^3+ax+b)-2abx^2+(a^3-b^2)x+a^2b$$

となることから

$a\alpha^5+b\alpha^4=-2ab\alpha^2+(a^3-b^2)\alpha+a^2b$

$a\beta^5+b\beta^4=-2ab\beta^2+(a^3-b^2)\beta+a^2b$

$a\gamma^5+b\gamma^4=-2ab\gamma^2+(a^3-b^2)\gamma+a^2b$

よって $at_5+bt_4=a(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)+b(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$

$$=-2ab(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(a^3-b^2)(\alpha+\beta+\gamma)+3a^2b$$

$$=4a^2b+3a^2b$$

$$=7a^2b$$