[東京工業大学 1964 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x,\ y,\ z$ は条件 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 2 \leqq z \leqq 3$ を満たしながら変化する。$w=\dfrac{z-x}{z-y}$ とおくとき，次の問に答えよ。

(1) $w=3$ となることがあるか。

(2) z を一定にしたとき，w の最大値を z で表せ。

(3) w の最大値を求めよ。

(4) z のどんな値に対しても $w=k$ を満たす $x,\ y$ が存在するような k の最大値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 条件より $1 \leqq z-x \leqq 3,\ 1 \leqq z-y \leqq 3$ であるから $\dfrac{z-x}{z-y} \leqq 3$

等号が成立するのは $z-x=3$ かつ $z-y=1$ のときで，

このとき $z=3,\ x=0$ かつ $z=2,\ y=1$ となるので，これは起こりえない。

(2) z を一定にしたとき，

$$w=\frac{z-x}{z-y}=\frac{z-y+y-x}{z-y}=1+\frac{y-x}{z-y} \leqq 1+\frac{1+0}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}$$

となるので，w の最大値は $1+\dfrac{1}{z-1}$

(3) (2)より $w=1+\dfrac{1}{z-1} \leqq 1+\dfrac{1}{2-1}=2$ となるので w の最大値は 2（$x=0,\ y=1,\ z=2$ のとき）

(4) z を一定にしたときの w の最小値は

$$w=1+\frac{y-x}{z-y} \geqq 1+\frac{0-1}{z-0}=1-\frac{1}{z}$$ より $1-\dfrac{1}{z}$

よって $1-\dfrac{1}{z} \leqq w \leqq 1+\dfrac{1}{z-1}$ である。

ここで，z を変化させると

$1-\dfrac{1}{z}$ の最大値は $z=3$ のときの $\dfrac{2}{3}$，$1+\dfrac{1}{z-1}$ の最小値は $z=2$ のときの $\dfrac{3}{2}$ であることから

任意の z に対し，$w=k$ を満たすような $x,\ y$ が存在するような k の範囲は $\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$

よって，題意の k の最大値は $\dfrac{3}{2}$ である。

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{2}$]

$a,\ b,\ c,\ d$ は正数とする。

(1) 次の 2 つの不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

(2) 次の式で与えられる P, Q, R, S の大小を比較せよ。

$$\mathrm{P} = \frac{a+b+c+d}{4},\ \mathrm{Q} = \sqrt[4]{abcd}\ ,$$

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6},\quad \mathrm{S} = \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

---

(1) $A,\ B,\ C > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} A^3+B^3+C^3-3ABC &= (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \\ &= \frac{1}{2}(A+B+C)\left\{(A+B)^2+(B+C)^2+(C+A)^2\right\} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。等号成立は $A=B=C$ のとき。

よって $\dfrac{A^3+B^3+C^3}{3} \geqq ABC$ が成り立ち, $A=\sqrt[3]{a},\ B=\sqrt[3]{b},\ C=\sqrt[3]{c}$ とすると

$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ となる。

また, 相加・相乗平均の関係式より

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{4} &= \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \\ &\geqq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \\ &\geqq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} \\ &= \sqrt[4]{abcd} \end{aligned}$$

が成り立つ。等号成立は $a=b=c=d$ のとき。

(2) (1)の不等式を用いると

$$\mathrm{P}=\frac{a+b+c+d}{4}$$

$$=\frac{3a+3b+3c+3d}{12}$$

$$=\frac{a+b}{12}+\frac{a+c}{12}+\frac{a+d}{12}+\frac{b+c}{12}+\frac{b+d}{12}+\frac{c+d}{12}$$

$$\geqq\frac{\sqrt{ab}}{6}+\frac{\sqrt{ac}}{6}+\frac{\sqrt{ad}}{6}+\frac{\sqrt{bc}}{6}+\frac{\sqrt{bd}}{6}+\frac{\sqrt{cd}}{6}=\mathrm{R}$$

$$\mathrm{R}=\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{12}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}}{12}+\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{cd}}{12}+\frac{2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12}$$

$$\geqq\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(abc)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(abd)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(acd)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(bcd)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{abc}}{4}+\frac{\sqrt[3]{abd}}{4}+\frac{\sqrt[3]{acd}}{4}+\frac{\sqrt[3]{bcd}}{4}=\mathrm{S}$$

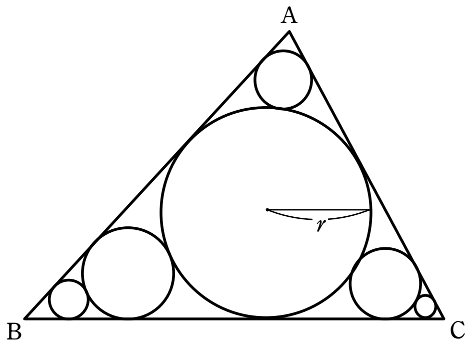
$$\mathrm{S}=\frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

$$\geqq\sqrt[4]{\sqrt[3]{(abcd)^3}}=\sqrt[4]{abcd}=\mathrm{Q}$$

よって　$\mathrm{P}\geqq\mathrm{R}\geqq\mathrm{S}\geqq\mathrm{Q}$　である。

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{3}$]

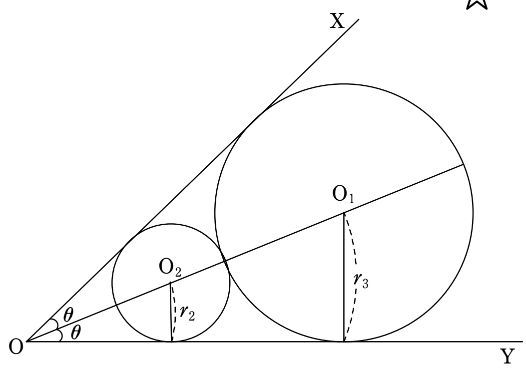
図のように，三角形 ABC の内接円よりはじめて，次々と前の円と外接し，かつ三角形の 2 辺に接する円を 3 つの頂点に向かってえがいていく。このとき，三角形内にあるすべての円の面積の総和を，内接円の半径 r と 3 つの内角 A, B, C で表せ。とくに，1 辺 a の正三角形の場合に，この総和はいくらか。



図のように $\angle$XOY の 2 辺に接する円 O_1 と，2 辺と円 O_1 に O の側から接する円 O_2 がある。

$\angle \mathrm{XOY} = 2\theta$，円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とすると

$$\sin\theta = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad \text{より} \quad r_2 = r_1 \times \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$



$\angle$A 内の円の半径を順に $a_1, a_2, \cdots\cdots$ とすると $a_1 = r \times \dfrac{1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}$

$\dfrac{1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}} = \alpha$ とおくと $a_{n+1} = a_n \times \alpha = a_{n-1} \times \alpha^2 = \cdots = a_1 \times \alpha^n = r\alpha^{n+1}$

よって，$\angle$A 内の面積の和は $0 < \mathrm{A} < \pi \iff 0 < \dfrac{\mathrm{A}}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < \alpha = \dfrac{1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}} < 1$ なので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi {a_k}^2 = \pi r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2k} = \pi r^2 \times \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \pi r^2 \times \frac{\left(\dfrac{1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}}\right)^2} = \pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}}$$

となる。

同様に，$\angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ 内の円の面積の和もそれぞれ

$$\pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}},\ \pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}$$ となる。

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ 内の円の面積 S は

$$S = \pi r^2 + \pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}} + \pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}} + \pi r^2 \times \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

$$= \pi r^2 \left\{1 + \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}} + \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}} + \frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}\right\}$$

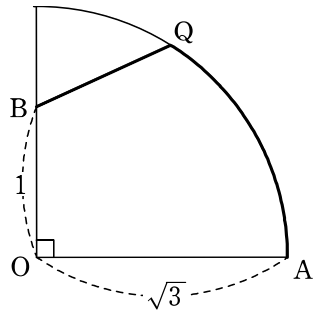
また，$\triangle\mathrm{ABC}$ が 1 辺 a の正三角形の場合

$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C} = \frac{\pi}{3}$， $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a$ であるから

$$S = \pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right\} = \frac{11}{96}\pi a^2$$

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{4}$]

図はOを中心とする四分円であって，$OA=\sqrt{3},\ OB=1$である。いま，動点Pが円弧に沿ってAからQまで進み，さらにQからBまで直進する。ところが，Pの弧AQ上での速さは2，線分QB上での速さは1である。この路に沿ってのAからBまでの所要時間が最小となるような点Qの位置を求めよ。



OA, OBをx, y軸にとり，$\angle AOQ=\theta$ とする。

このとき，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$Q\left(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta\right)$，$\overset{\frown}{AQ}=\sqrt{3}\theta$，

$BQ=\sqrt{3\cos^2\theta+\left(1-\sqrt{3}\sin\theta\right)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$ となる。

題意のようにAからQを通ってBに到達するための所要時間$T(\theta)$は

$$T(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\theta+\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$$

$$T'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(4-2\sqrt{3}\sin\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2\sqrt{3}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}\cos\theta}{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}-2\cos\theta\right)}{2\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}}$$

$T'(\theta)=0$ となるのは $\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}=2\cos\theta \iff 4-2\sqrt{3}\sin\theta=4\cos^2\theta$ かつ $\cos\theta\geqq 0$

$$2(1-\cos^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta=0$$

$$2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta=0$$

$$\sin\theta\left(2\sin\theta-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\sin\theta=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\theta = 0, \dfrac{\pi}{3}$

$T(\theta)$ の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$T'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$T(\theta)$		↘	最小	↗	

よって $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のときに $T(\theta)$ は最小となる。

したがって $\angle \mathrm{AOQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となる位置。

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{5}$]

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1,\ \int_{-1}^{1} xf(x) = 0$ を満たす関数 $f(x) = ax + b$ に対して

$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x)\,dx,\ A = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx,\ H(t) = \dfrac{A}{A + t^2}$ とおく。このとき，$-1 \leqq t \leqq 0$ において

$G(t)$ と $H(t)$ との大小を調べよ。

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax + b)\,dx = 2b = 1$ より $b = \dfrac{1}{2}$

$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x(ax + b)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx)\,dx = \dfrac{2}{3}a = 0$ より $a = 0$

よって $f(x) = \dfrac{1}{2}$

したがって $G(t) = \int_{-1}^{t} \dfrac{1}{2}\,dx = \dfrac{t+1}{2}$ ，$A = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \dfrac{1}{2}\,dx = \dfrac{1}{3}$ ，$H(t) = \dfrac{1}{1 + 3t^2}$ となる。

ここで，$G(t) - H(t) = \dfrac{t+1}{2} - \dfrac{1}{1+3t^2} = \dfrac{3t^3 + 3t^2 + t - 1}{2(1+3t^2)}$ とおき，

$g(t) = 3t^3 + 3t^2 + t - 1$ とする。

$g'(t) = 9t^2 + 6t + 1 = (3t+1)^2 \geqq 0$ より $g(t)$ は単調増加である。。

さらに，$g(0) = -1$ であるから $t \leqq 0$ において $g(t) < 0$ となる。

$2(1+3t^2) > 0$ であることから $-1 \leqq t \leqq 0$ において $G(t) - H(t) < 0 \Leftrightarrow G(t) < H(t)$ となる。

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{6}$]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（$a,\ b,\ c$ は定数）のとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$

---

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ である。

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{a}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{b}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2n+1}{4n}-\frac{a(3n+1)}{6n}-\frac{b}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{(n+1)^2}{4n^2}-\frac{a(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{b(n+1)}{2n}-c\right\}$$

$$=-\frac{a+b+1}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left\{(1+h)^3+a(1+h)^2+b(1+h)+c-(1+a+b+c)-h(3+2a+b)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(3h^2+h^3+ah^2\right)$$

$$=a+3$$