[東京工業大学 1964 年 $\boxed{1}$]

$x,\ y,\ z$ は条件 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 2 \leqq z \leqq 3$ を満たしながら変化する。$w=\dfrac{z-x}{z-y}$ とおくとき，次の問に答えよ。

(1) $w=3$ となることがあるか。

(2) z を一定にしたとき，w の最大値を z で表せ。

(3) w の最大値を求めよ。

(4) z のどんな値に対しても $w=k$ を満たす $x,\ y$ が存在するような k の最大値を求めよ。

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{2}$]

a, b, c, d は正数とする。

(1) 次の 2 つの不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

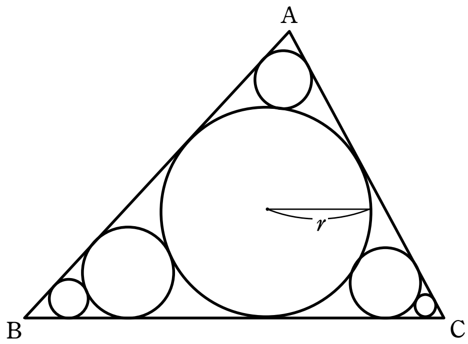
(2) 次の式で与えられる P, Q, R, S の大小を比較せよ。

$$\mathrm{P} = \frac{a+b+c+d}{4},\ \mathrm{Q} = \sqrt[4]{abcd}\ ,$$

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6},\quad \mathrm{S} = \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

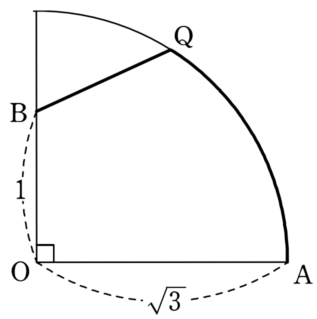
[東京工業大学 1964 年 $\boxed{3}$]

図のように，三角形ABCの内接円よりはじめて，次々と前の円と外接し, かつ三角形の 2 辺に接する円を 3 つの頂点に向かってえがいていく。このとき，三角形内にあるすべての円の面積の総和を, 内接円の半径 r と 3 つの内角 A, B, C で表せ。とくに，1 辺 a の正三角形の場合に，この総和はいくらか。



[東京工業大学 1964 年 $\boxed{4}$]

図はOを中心とする四分円であって，$\mathrm{OA}=\sqrt{3}$, $\mathrm{OB}=1$である。いま，動点Pが円弧に沿ってAからQまで進み，さらにQからBまで直進する。ところが，Pの弧AQ上での速さは2，線分QB上での速さは1である。この路に沿ってのAからBまでの所要時間が最小となるような点Qの位置を求めよ。



[東京工業大学 1964 年 $\boxed{5}$]

☆ ☆

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1,\ \int_{-1}^{1} xf(x) = 0$ を満たす関数 $f(x) = ax + b$ に対して

$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x)\,dx,\ A = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx,\ \ H(t) = \dfrac{A}{A + t^2}$ とおく。このとき，$-1 \leqq t \leqq 0$ において

$G(t)$ と $H(t)$ との大小を調べよ。

☆ ☆

[東京工業大学 1964 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（$a,\ b,\ c$ は定数）のとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$

☆ ☆