[東京工業大学 1964 年 6]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ （$a,\ b,\ c$ は定数）のとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$

---

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ である。

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{a}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{b}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2n+1}{4n}-\frac{a(3n+1)}{6n}-\frac{b}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c-\frac{(n+1)^2}{4n^2}-\frac{a(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{b(n+1)}{2n}-c\right\}$$

$$=-\frac{a+b+1}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left\{(1+h)^3+a(1+h)^2+b(1+h)+c-(1+a+b+c)-h(3+2a+b)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(3h^2+h^3+ah^2\right)$$

$$=a+3$$