[東京工業大学 1964 年 $\boxed{5}$]

☆―――☆

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1,\ \int_{-1}^{1} xf(x)=0$ を満たす関数 $f(x)=ax+b$ に対して

$G(t)=\int_{-1}^{t} f(x)\,dx,\ A=\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx,\ \ H(t)=\dfrac{A}{A+t^2}$ とおく。このとき，$-1\leqq t\leqq 0$ において

$G(t)$ と $H(t)$ との大小を調べよ。

☆―――☆

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax+b)\,dx=2b=1$ より $b=\dfrac{1}{2}$

$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x(ax+b)\,dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)\,dx=\dfrac{2}{3}a=0$ より $a=0$

よって $f(x)=\dfrac{1}{2}$

したがって $G(t)=\int_{-1}^{t}\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{t+1}{2}$ ， $A=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{3}$ ， $H(t)=\dfrac{1}{1+3t^2}$ となる。

ここで，$G(t)-H(t)=\dfrac{t+1}{2}-\dfrac{1}{1+3t^2}=\dfrac{3t^3+3t^2+t-1}{2(1+3t^2)}$ とおき，

$g(t)=3t^3+3t^2+t-1$ とする。

$g'(t)=9t^2+6t+1=(3t+1)^2\geqq 0$ より $g(t)$ は単調増加である。。

さらに，$g(0)=-1$ であるから $t\leqq 0$ において $g(t)<0$ となる。

$2(1+3t^2)>0$ であることから $-1\leqq t\leqq 0$ において $G(t)-H(t)<0\ \Leftrightarrow\ G(t)<H(t)$ となる。