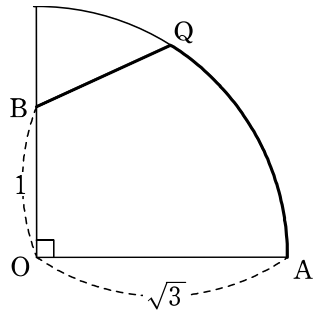
[東京工業大学 1964 年 $\boxed{4}$]

☆ ☆

図はOを中心とする四分円であって，$\mathrm{OA}=\sqrt{3},\ \mathrm{OB}=1$である。いま，動点Pが円弧に沿ってAからQまで進み，さらにQからBまで直進する。ところが，Pの弧AQ上での速さは2，線分QB上での速さは1である。この路に沿ってのAからBまでの所要時間が最小となるような点Qの位置を求めよ。



☆ ☆

OA, OBをx, y軸にとり，$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ とする。

このとき，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta\right)$，$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=\sqrt{3}\theta$，

$\mathrm{BQ}=\sqrt{3\cos^2\theta+\left(1-\sqrt{3}\sin\theta\right)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$ となる。

題意のようにAからQを通ってBに到達するための所要時間$T(\theta)$は

$$T(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\theta+\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}$$

$$T'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(4-2\sqrt{3}\sin\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2\sqrt{3}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}\cos\theta}{\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}-2\cos\theta\right)}{2\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}}$$

$T'(\theta)=0$ となるのは $\sqrt{4-2\sqrt{3}\sin\theta}=2\cos\theta \iff 4-2\sqrt{3}\sin\theta=4\cos^2\theta$ かつ $\cos\theta\geqq 0$

$$2(1-\cos^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta=0$$

$$2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta=0$$

$$\sin\theta\left(2\sin\theta-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\sin\theta=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\theta = 0, \dfrac{\pi}{3}$

$T(\theta)$ の増減は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$T'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$T(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のときに $T(\theta)$ は最小となる。

したがって $\angle \mathrm{AOQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となる位置。