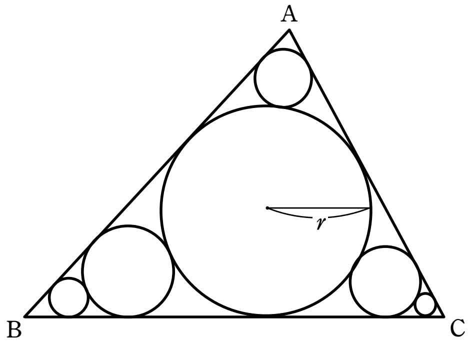
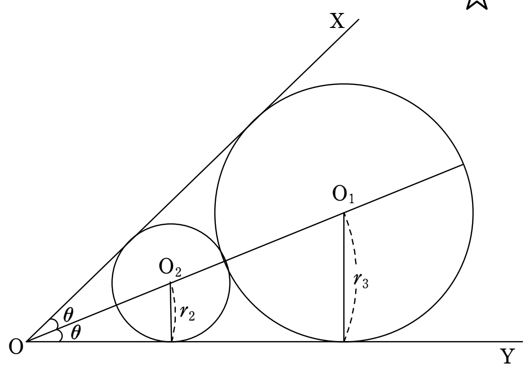
[東京工業大学 1964 年 $\boxed{3}$]

図のように，三角形ABCの内接円よりはじめて，次々と前の円と外接し，かつ三角形の 2 辺に接する円を 3 つの頂点に向かってえがいていく。このとき，三角形内にあるすべての円の面積の総和を，内接円の半径 r と 3 つの内角 A, B, C で表せ。とくに，1 辺 a の正三角形の場合に，この総和はいくらか。





図のように$\angle$XOY の 2 辺に接する円O_1と，

2 辺と円O_1に O の側から接する円O_2がある。

$\angle\mathrm{XOY}=2\theta$，円$\mathrm{O}_1$, O_2の半径をそれぞれ r_1, r_2 とすると

$$\sin\theta=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2} \quad \text{より} \quad r_2=r_1\times\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$\angle$A 内の円の半径を順に $a_1, a_2, \cdots\cdots$ とすると $a_1=r\times\dfrac{1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}$

$\dfrac{1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}=\alpha$ とおくと $a_{n+1}=a_n\times\alpha=a_{n-1}\times\alpha^2=\cdots=a_1\times\alpha^n=r\alpha^{n+1}$

よって，$\angle$A 内の面積の和は $0<\mathrm{A}<\pi \Leftrightarrow 0<\dfrac{\mathrm{A}}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\alpha=\dfrac{1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}<1$ なので

$$\sum_{k=1}^{\infty}\pi {a_k}^2=\pi r^2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{2k}=\pi r^2\times\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}=\pi r^2\times\frac{\left(\dfrac{1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}\right)^2}=\pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}}$$

となる。

同様に，$\angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{C}$ 内の円の面積の和もそれぞれ

$$\pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}},\ \pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}$$ となる。

よって，△ABC 内の円の面積 S は

$$S=\pi r^2+\pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}}+\pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}}+\pi r^2\times\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}$$

$$=\pi r^2\left\{1+\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{A}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{A}}{2}}+\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{B}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{B}}{2}}+\frac{\left(1-\sin\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2}{4\sin^2\frac{\mathrm{C}}{2}}\right\}$$

また，△ABC が 1 辺 a の正三角形の場合

$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{3}$，$r=\frac{1}{2\sqrt{3}}a$ であるから

$$S=\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2\left\{1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right\}=\frac{11}{96}\pi a^2$$