[東京工業大学 1964 年 $\boxed{2}$]

$a,\ b,\ c,\ d$ は正数とする。

(1) 次の 2 つの不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}\ ;\ \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

(2) 次の式で与えられる P, Q, R, S の大小を比較せよ。

$$\mathrm{P} = \frac{a+b+c+d}{4},\ \mathrm{Q} = \sqrt[4]{abcd}\ ,$$

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}}{6},\quad \mathrm{S} = \frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

---

(1) $A,\ B,\ C > 0$ に対し,

$$A^3+B^3+C^3-3ABC = (A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$$
$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\left\{(A+B)^2+(B+C)^2+(C+A)^2\right\}$$
$$\geqq 0$$

が成り立つ。等号成立は $A=B=C$ のとき。

よって $\dfrac{A^3+B^3+C^3}{3} \geqq ABC$ が成り立ち, $A=\sqrt[3]{a},\ B=\sqrt[3]{b},\ C=\sqrt[3]{c}$ とすると

$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ となる。

また，相加・相乗平均の関係式より

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}$$
$$\geqq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$$
$$\geqq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$$
$$= \sqrt[4]{abcd}$$

が成り立つ。等号成立は $a=b=c=d$ のとき。

⑵ ⑴の不等式を用いると

$$\mathrm{P}=\frac{a+b+c+d}{4}$$

$$=\frac{3a+3b+3c+3d}{12}$$

$$=\frac{a+b}{12}+\frac{a+c}{12}+\frac{a+d}{12}+\frac{b+c}{12}+\frac{b+d}{12}+\frac{c+d}{12}$$

$$\geqq\frac{\sqrt{ab}}{6}+\frac{\sqrt{ac}}{6}+\frac{\sqrt{ad}}{6}+\frac{\sqrt{bc}}{6}+\frac{\sqrt{bd}}{6}+\frac{\sqrt{cd}}{6}=\mathrm{R}$$

$$\mathrm{R}=\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{12}+\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ad}+\sqrt{bd}}{12}+\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{cd}}{12}+\frac{2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}}{12}$$

$$\geqq\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(abc)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(abd)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(acd)^2}}}{4}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{(bcd)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{abc}}{4}+\frac{\sqrt[3]{abd}}{4}+\frac{\sqrt[3]{acd}}{4}+\frac{\sqrt[3]{bcd}}{4}=\mathrm{S}$$

$$\mathrm{S}=\frac{\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{abd}+\sqrt[3]{acd}+\sqrt[3]{bcd}}{4}$$

$$\geqq\sqrt[4]{\sqrt[3]{(abcd)^3}}=\sqrt[4]{abcd}=\mathrm{Q}$$

よって　$\mathrm{P}\geqq\mathrm{R}\geqq\mathrm{S}\geqq\mathrm{Q}$　である。