[東京工業大学 1964 年 $\boxed{1}$]

$x,\ y,\ z$ は条件 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 2 \leqq z \leqq 3$ を満たしながら変化する。$w = \dfrac{z-x}{z-y}$ とおくとき，次の問に答えよ。

(1) $w = 3$ となることがあるか。

(2) z を一定にしたとき，w の最大値を z で表せ。

(3) w の最大値を求めよ。

(4) z のどんな値に対しても $w = k$ を満たす $x,\ y$ が存在するような k の最大値を求めよ。

(1) 条件より $1 \leqq z-x \leqq 3,\ 1 \leqq z-y \leqq 3$ であるから $\dfrac{z-x}{z-y} \leqq 3$

等号が成立するのは $z-x=3$ かつ $z-y=1$ のときで，

このとき $z=3,\ x=0$ かつ $z=2,\ y=1$ となるので，これは起こりえない。

(2) z を一定にしたとき，

$$w = \frac{z-x}{z-y} = \frac{z-y+y-x}{z-y} = 1 + \frac{y-x}{z-y} \leqq 1 + \frac{1+0}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

となるので，w の最大値は $1 + \dfrac{1}{z-1}$

(3) (2)より $w = 1 + \dfrac{1}{z-1} \leqq 1 + \dfrac{1}{2-1} = 2$ となるので w の最大値は 2（$x=0,\ y=1,\ z=2$ のとき）

(4) z を一定にしたときの w の最小値は

$w = 1 + \dfrac{y-x}{z-y} \geqq 1 + \dfrac{0-1}{z-0} = 1 - \dfrac{1}{z}$ より $1 - \dfrac{1}{z}$

よって $1 - \dfrac{1}{z} \leqq w \leqq 1 + \dfrac{1}{z-1}$ である。

ここで，z を変化させると

$1 - \dfrac{1}{z}$ の最大値は $z=3$ のときの $\dfrac{2}{3}$，$1 + \dfrac{1}{z-1}$ の最小値は $z=2$ のときの $\dfrac{3}{2}$ であることから

任意の z に対し，$w=k$ を満たすような $x,\ y$ が存在するような k の範囲は $\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$

よって，題意の k の最大値は $\dfrac{3}{2}$ である。