[東京工業大学 1963 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

連立方程式 $x^3-y^3-z^3=3xyz,\ x^2=2(y+z)$ を満たす正の整数解を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^3-y^3-z^3-3xyz=x^3+(-y)^3+(-z)^3-3x(-y)(-z)$

$=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy)\ =0$ である。

ここで, $x,\ y,\ z>0$ のとき

$x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy=\dfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\}>0$ であるから

$x-y-z=0$ すなわち $x=y+z$ となる。

このとき, $x^2=2(y+z)$ より $x^2=2x\ \Leftrightarrow\ x(x-2)=0$

$x>0$ より $x=2$ となり, $y+z=2$ かつ $y,\ z$ は正の整数なので $y=z=1$

逆に, $x=2,\ y=z=1$ は与えられた式を満たしている。

よって $x=2,\ y=z=1$

[別解]

$x^3-y^3-z^3=3xyz>0$ より $x>y,\ x>z$ であり, $x>1$ となる。

ここで, $x^2=2(y+z)<2(x+x)=4x$ より $x(x-4)<0$ から $0<x<4$

$x>1$ なので $x=2,\ 3$ であるが, $x^2=2(y+z)$ より x は偶数なので $x=2$

このとき, $x>y,\ x>z$ から $y=z=1$

逆に, $x=2,\ y=z=1$ は与えられた式を満たしている。

よって $x=2,\ y=z=1$

[東京工業大学 1963 年 $\boxed{2}$]

$x>0,\ y>0,\ a>0$ のとき， $x+y \leqq 1+a,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)$ ならば $(2x-1)^2<4a(1+a)$ が成り立つことを示せ。

$x+y \leqq 1+a \quad \cdots①$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a) \quad \cdots②$

①より $y \leqq (1+a)-x \quad \cdots①'$

②より $\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)-\dfrac{1}{x} \quad \cdots②'$

$y>0$ であるから ①$'$ ×②$'$ より

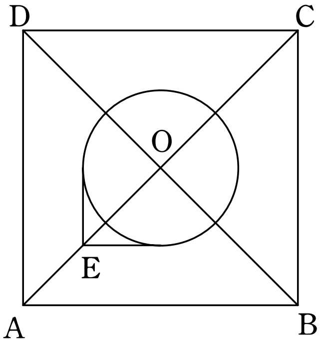
$$
\begin{aligned}
1 \leqq \left\{(1+a)-x\right\}\left\{4(1+a)-\frac{1}{x}\right\} &\Leftrightarrow x \leqq \left\{(1+a)-x\right\}\left\{4(1+a)x-1\right\} \\
&\Leftrightarrow x = 4(1+a)^2x-4(1+a)x^2+(1+a)+x \\
&\Leftrightarrow 4(1+a)x^2-4(1+a)^2x+(1+a) \leqq 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2-4(1+a)x+1 \leqq 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \leqq 4ax \\
&\Leftrightarrow (2x-1)^2 \leqq 4ax \quad \cdots③
\end{aligned}
$$

となる。

ここで，①より $x<x+y \leqq 1+a$ であるから③より $(2x-1)^2<4a(1+a)$ が成り立つ。

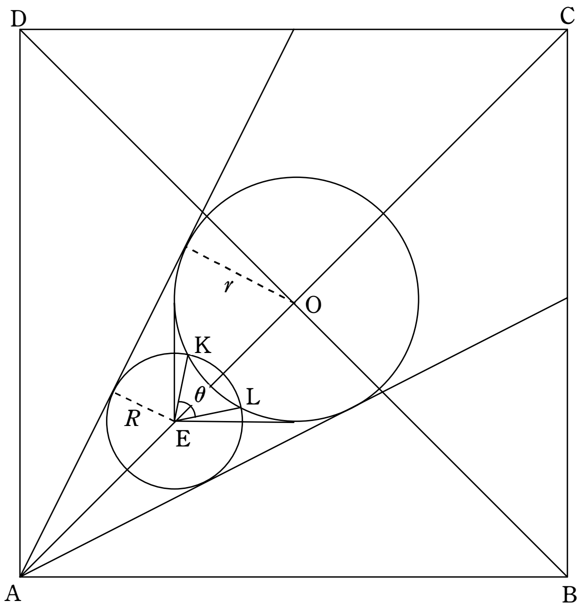
[東京工業大学 1963 年 $\boxed{3}$]

図のように，1 辺の長さ 2 の正方形 ABCD の内部に，対角線の交点 O を中心とする半径 r の円をえがき，AB, AD に平行なその接線の交点を E とする。いま，E を中心とする円を，円 O との相似の中心が A であるようにえがく。このとき，次の問に答えよ。



(1) 2 円（円 O と円 E）が交わるような r の値の範囲を求めよ。

(2) 2 円が交わるとき，交点を K, L とすれば，$\theta = \angle\mathrm{KEL}$ はどんな範囲にあるか。



円 E の半径を R とすると，

相似比より $\mathrm{AO}:\mathrm{AE} = r:R$ である。

$\mathrm{AO} = \sqrt{2}$， $\mathrm{AE} = \sqrt{2} - \sqrt{2}r$ であるから

$\sqrt{2}:\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}r\right) = r:R$ より $R = r(1-r)$

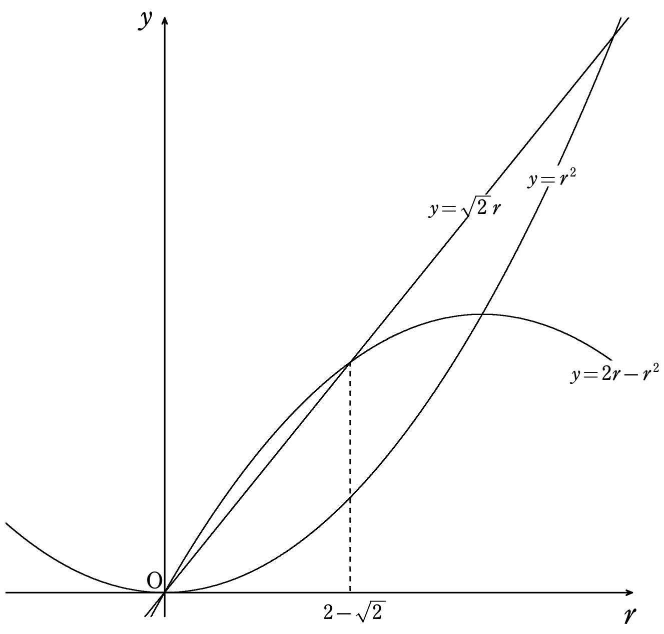
(1) 2 円が交わる条件は $r - R < \mathrm{OE} < r + R$ であり，

$\mathrm{OE} = \sqrt{2}r$ なので $r - r(1-r) < \sqrt{2}r < r + r(1-r)$

$$\Leftrightarrow\ r^2 < \sqrt{2}r < 2r - r^2 \ \cdots ①$$

①を満たす r の範囲は，グラフを考えて

グラフの上下関係を考えて $0 < r < 2 - \sqrt{2} \cdots ②$



(2) $\theta=\angle\mathrm{KEL}$ のとき $\angle\mathrm{KEO}=\dfrac{\theta}{2}$ である。

$\mathrm{EK}=R=r(1-r),\ \mathrm{OK}=r,\ \mathrm{OE}=\sqrt{2}r$ であるから△OKE において余弦定理より

$$r^2=\{r(1-r)\}^2+2r^2-2\cdot r(1-r)\cdot\sqrt{2}r\cos\frac{\theta}{2}$$

$r^2(>0)$ で割って整理すると $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{r^2-2r+2}{2\sqrt{2}(1-r)}$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ より

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{r^2-2r+2}{2\sqrt{2}(1-r)}\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1+\cos\theta}=\frac{(1-r)^2+1}{2(1-r)}\ \cdots③$$

ここで，$1-r=t$ とおくと ③ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{1+\cos\theta}=\dfrac{t^2+1}{2t}$ であり，②より $\sqrt{2}-1<t<1$ である。

2 乗して整理すると $\cos\theta=\dfrac{(t^2-1)^2}{4t^2}$

$f(t)=\dfrac{(t^2-1)^2}{4t^2}$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{2(t^2-1)\cdot2t\cdot4t^2-(t^2-1)^2\cdot8t}{16t^4}=\frac{t^4-1}{2t^3}=\frac{(t+1)(t-1)(t^2+1)}{2t^3}$$

$\sqrt{2}-1<t<1$ において $f'(t)<0$ であるから $f(t)$ はこの範囲で単調減少である。

$f\left(\sqrt{2}-1\right)=1$， $f(1)=0$ であるから $0<\cos\theta<1$ となる。

したがって $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

[東京工業大学 1963 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――☆

次の関数の極大，極小を求めよ。

$$f(x)=2\tan^3 x-3(\sqrt{3}+1)\sec^2 x+6\sqrt{3}\tan x-1$$

☆―――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=2\tan^3 x-3(\sqrt{3}+1)\sec^2 x+6\sqrt{3}\tan x-1$

$\quad =2\tan^3 x-3(\sqrt{3}+1)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}+6\sqrt{3}\tan x-1$

$\quad =2\tan^3 x-3(\sqrt{3}+1)\cdot(1+\tan^2 x)+6\sqrt{3}\tan x-1$ であり，

$\tan x=t$ とおくと $f(x)=g(t)=2t^3-3(\sqrt{3}+1)\cdot(1+t^2)+6\sqrt{3}t-1$ となる。

$\tan x$ は周期 π なので，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で考えればよく，このとき t は実数全体を動く。

$g'(t)=6t^2-6\left(\sqrt{3}+1\right)t+6\sqrt{3}=6\left(t-\sqrt{3}\right)\left(t-1\right)$ より $g(t)$ の増減は下表に従う。

t	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	＋	0	－	0	＋
$g(t)$	↗	-5	↘	$5-6\sqrt{3}$	↗

よって $f(x)=g(t)$ は

$t=1$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　極大値 -5

$t=\sqrt{3}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　極小値 $5-6\sqrt{3}$

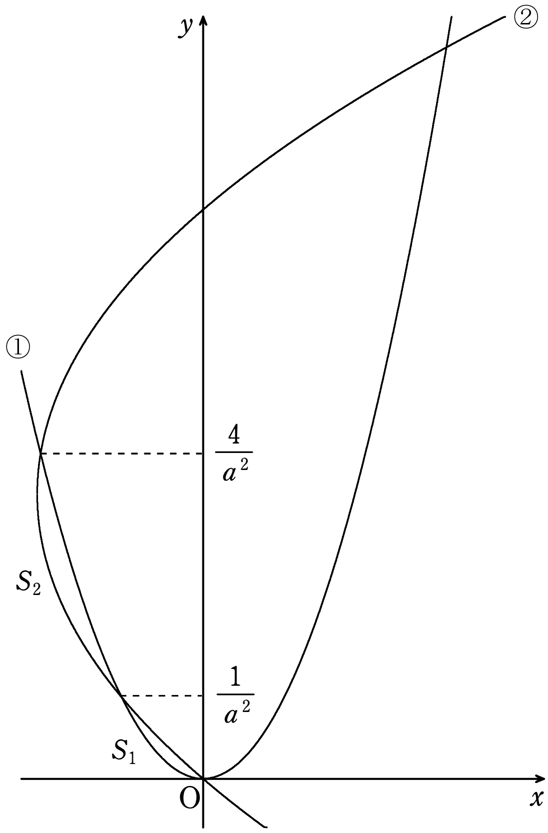
をとる。

[東京工業大学 1963 年 $\boxed{5}$]

a を正の定数とするとき， $x \leqq 0$ の範囲において 2 つの放物線

$$y = x^2,\ 6x = a^3y^2 - 7ay$$

が囲む 2 つの部分の面積の比を求めよ。



$y = x^2 \quad \cdots①$

$6x = a^3y^2 - 7ay \quad \cdots②$

①，②を連立して交点の座標を求める。

$6x = a^3x^4 - 7ax^2 \iff x(a^3x^3 - 7ax - 6) = 0$

$\iff x(ax+1)(ax+2)(ax-3) = 0$

よって $x \leqq 0$ の範囲で $x = 0, -\dfrac{1}{a}, -\dfrac{2}{a}$

このとき， $y = 0, \dfrac{1}{a^2}, \dfrac{4}{a^4}$

$x \leqq 0$ で①を解くと $x = -\sqrt{y}$

よって，囲む 2 つの部分の面積を S_1, S_2 とすると

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{a^2}} \left\{ \frac{1}{6}(a^3y^2 - 7ay) - \left(-\sqrt{y}\right) \right\} dy$$

$$= \left[\frac{a^3}{18}y^3 - \frac{7a}{12}y^2 + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{18}a^{-3} - \frac{7}{12}a^{-3} + \frac{2}{3}a^{-3} = \frac{5}{36}a^{-3}$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{4}{a^4}} \left\{ -\sqrt{y} - \frac{1}{6}(a^3y^2 - 7ay) \right\} dy$$

$$= \left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{a^3}{18}y^3 + \frac{7a}{12}y^2 \right]_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{4}{a^2}} = \left(-\frac{16}{3}a^{-3} - \frac{32}{9}a^{-3} + \frac{28}{3}a^{-3} \right) - \left(-\frac{2}{3}a^{-3} - \frac{1}{18}a^{-3} + \frac{7}{12}a^{-3} \right)$$

$$= \frac{21}{36}a^{-3}$$

よって $S_1 : S_2 = 5 : 21$

[東京工業大学 1963 年 $\boxed{6}$]

☆―――☆

二次関数 $f(x)=x^2+px+q$ が任意な一次関数 $g(x)$ に対して

$$\int_0^a f(x)g(x)=0$$ （a は正の定数）

を満たすならば， $f(x)=0$ は範囲 $0<x<a$ に 2 つの実根をもつことを証明せよ。

☆―――☆

仮定より，任意の実数 $k,\ \ell$ に対し

$$\int_0^a f(x)(kx+\ell)\,dx=\int_0^a (x^2+px+q)(kx+\ell)\,dx$$

$$=k\int_0^a x(x^2+px+q)\,dx+\ell\int_0^a (x^2+px+q)\,dx=0$$

よって $\int_0^a x(x^2+px+q)\,dx=0$ かつ $\int_0^a (x^2+px+q)\,dx=0$ が成り立つ。

したがって $\frac{1}{4}a^4+\frac{p}{3}a^3+\frac{q}{2}a^2=0$ かつ $\frac{1}{3}a^3+\frac{p}{2}a^2+qa=0$ であるが， $a\neq 0$ より

$\frac{1}{4}a^2+\frac{p}{3}a+\frac{q}{2}=0$ かつ $\frac{1}{3}a^2+\frac{p}{2}a+q=0$

これを解くと $p=-a,\ q=\frac{1}{6}a^2$

これより $f(x)=x^2+px+q=x^2-ax+\frac{1}{6}a^2=0$ となり，

2 解は $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-\frac{2}{3}a^2}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}a$ となるが， $-1<\dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}<1$ であることから

$0<x<a$ を満たしている。