[東京工業大学 1963 年 $\boxed{6}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

二次関数 $f(x)=x^2+px+q$ が任意な一次関数 $g(x)$ に対して

$\int_0^a f(x)g(x)=0$ （a は正の定数）

を満たすならば，$f(x)=0$ は範囲 $0<x<a$ に 2 つの実根をもつことを証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

仮定より，任意の実数 $k,\ \ell$ に対し

$$\int_0^a f(x)(kx+\ell)\,dx=\int_0^a (x^2+px+q)(kx+\ell)\,dx$$

$$=k\int_0^a x(x^2+px+q)\,dx+\ell\int_0^a (x^2+px+q)\,dx=0$$

よって $\int_0^a x(x^2+px+q)\,dx=0$ かつ $\int_0^a (x^2+px+q)\,dx=0$ が成り立つ。

したがって $\frac{1}{4}a^4+\frac{p}{3}a^3+\frac{q}{2}a^2=0$ かつ $\frac{1}{3}a^3+\frac{p}{2}a^2+qa=0$ であるが，$a\neq 0$ より

$\frac{1}{4}a^2+\frac{p}{3}a+\frac{q}{2}=0$ かつ $\frac{1}{3}a^2+\frac{p}{2}a+q=0$

これを解くと $p=-a,\ q=\frac{1}{6}a^2$

これより $f(x)=x^2+px+q=x^2-ax+\frac{1}{6}a^2=0$ となり，

2 解は $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-\frac{2}{3}a^2}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}a$ となるが，$-1<\dfrac{1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}{2}<1$ であることから

$0<x<a$ を満たしている。