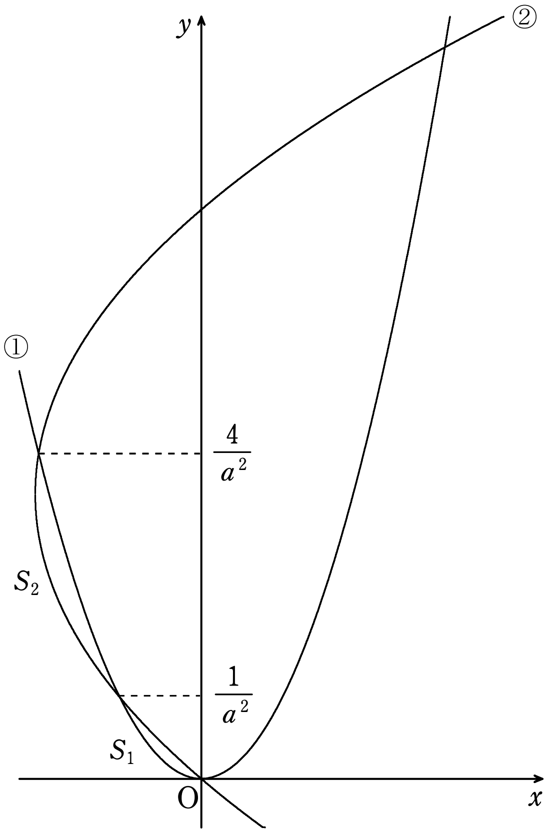
[東京工業大学 1963 年 $\boxed{5}$]

a を正の定数とするとき，$x \leqq 0$ の範囲において 2 つの放物線

$$y = x^2,\ 6x = a^3y^2 - 7ay$$

が囲む 2 つの部分の面積の比を求めよ。



$y = x^2$ $\cdots$①

$6x = a^3y^2 - 7ay$ $\cdots$②

①，②を連立して交点の座標を求める。

$6x = a^3x^4 - 7ax^2 \iff x(a^3x^3 - 7ax - 6) = 0$

$\iff x(ax+1)(ax+2)(ax-3) = 0$

よって $x \leqq 0$ の範囲で $x = 0, -\dfrac{1}{a}, -\dfrac{2}{a}$

このとき，$y = 0, \dfrac{1}{a^2}, \dfrac{4}{a^4}$

$x \leqq 0$ で①を解くと $x = -\sqrt{y}$

よって，囲む 2 つの部分の面積を S_1, S_2 とすると

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{a^2}} \left\{ \frac{1}{6}(a^3y^2 - 7ay) - \left(-\sqrt{y}\right) \right\} dy$$

$$= \left[\frac{a^3}{18}y^3 - \frac{7a}{12}y^2 + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{18}a^{-3} - \frac{7}{12}a^{-3} + \frac{2}{3}a^{-3} = \frac{5}{36}a^{-3}$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{4}{a^4}} \left\{ -\sqrt{y} - \frac{1}{6}(a^3y^2 - 7ay) \right\} dy$$

$$= \left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{a^3}{18}y^3 + \frac{7a}{12}y^2 \right]_{\frac{1}{a^2}}^{\frac{4}{a^2}} = \left(-\frac{16}{3}a^{-3} - \frac{32}{9}a^{-3} + \frac{28}{3}a^{-3} \right) - \left(-\frac{2}{3}a^{-3} - \frac{1}{18}a^{-3} + \frac{7}{12}a^{-3} \right)$$

$$= \frac{21}{36}a^{-3}$$

よって $S_1 : S_2 = 5 : 21$