

[ 東京工業大学 1963 年 4 ]



次の関数の極大, 極小を求めよ。

$$f(x) = 2 \tan^3 x - 3(\sqrt{3} + 1) \sec^2 x + 6\sqrt{3} \tan x - 1$$



$$f(x) = 2 \tan^3 x - 3(\sqrt{3} + 1) \sec^2 x + 6\sqrt{3} \tan x - 1$$

$$= 2 \tan^3 x - 3(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 6\sqrt{3} \tan x - 1$$

$$= 2 \tan^3 x - 3(\sqrt{3} + 1) \cdot (1 + \tan^2 x) + 6\sqrt{3} \tan x - 1 \text{ であり,}$$

$\tan x = t$  とおくと  $f(x) = g(t) = 2t^3 - 3(\sqrt{3} + 1) \cdot (1 + t^2) + 6\sqrt{3}t - 1$  となる。

$\tan x$  は周期  $\pi$  なので,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  で考えればよく, このとき  $t$  は実数全体を動く。

$g'(t) = 6t^2 - 6(\sqrt{3} + 1)t + 6\sqrt{3} = 6(t - \sqrt{3})(t - 1)$  より  $g(t)$  の増減は下表に従う。

$t$	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	-5	↘	$5 - 6\sqrt{3}$	↗

よって  $f(x) = g(t)$  は

$t = 1$  すなわち  $x = \frac{\pi}{4}$  のとき 極大値  $-5$

$t = \sqrt{3}$  すなわち  $x = \frac{\pi}{3}$  のとき 極小値  $5 - 6\sqrt{3}$

をとる。