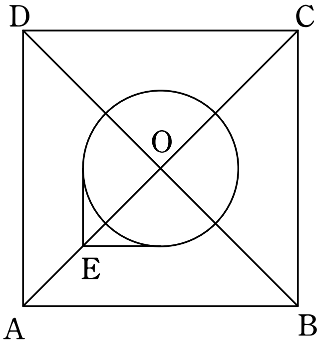
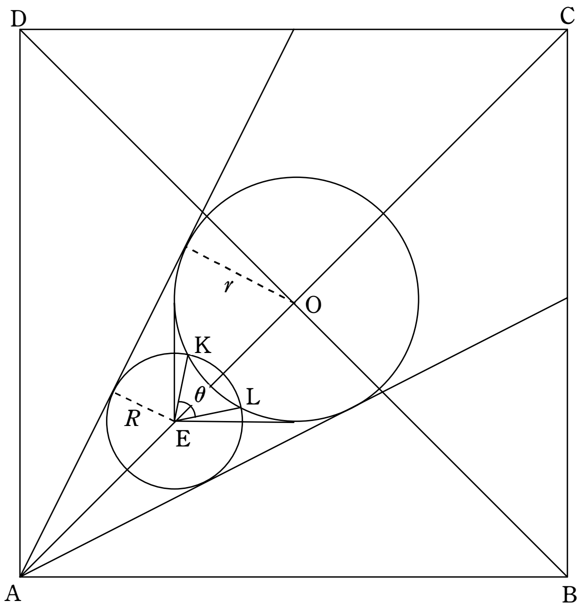
[東京工業大学 1963 年 $\boxed{3}$]

図のように，1 辺の長さ 2 の正方形 ABCD の内部に，対角線の交点 O を中心とする半径 r の円をえがき，AB, AD に平行なその接線の交点を E とする。いま，E を中心とする円を，円 O との相似の中心が A であるようにえがく。このとき，次の問に答えよ。



(1) 2 円（円 O と円 E）が交わるような r の値の範囲を求めよ。

(2) 2 円が交わるとき，交点を K, L とすれば，$\theta=\angle\mathrm{KEL}$ はどんな範囲にあるか。



円 E の半径を R とすると，

相似比より $\mathrm{AO}:\mathrm{AE}=r:R$ である。

$\mathrm{AO}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AE}=\sqrt{2}-\sqrt{2}r$ であるから

$\sqrt{2}:\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}r\right)=r:R$ より $R=r(1-r)$

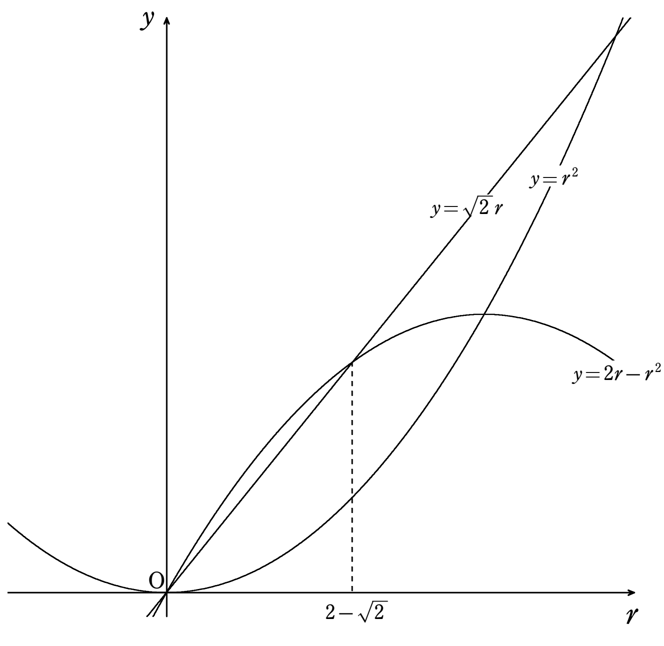
(1) 2 円が交わる条件は $r-R<\mathrm{OE}<r+R$ であり，

$\mathrm{OE}=\sqrt{2}r$ なので $r-r(1-r)<\sqrt{2}r<r+r(1-r)$

$$\Leftrightarrow\ r^2<\sqrt{2}r<2r-r^2\ \cdots ①$$

①を満たす r の範囲は，グラフを考えて

グラフの上下関係を考えて $0<r<2-\sqrt{2}\cdots ②$



(2) $\theta = \angle\mathrm{KEL}$ のとき $\angle\mathrm{KEO} = \dfrac{\theta}{2}$ である。

$\mathrm{EK} = R = r(1-r),\ \mathrm{OK} = r,\ \mathrm{OE} = \sqrt{2}r$ であるから△OKE において余弦定理より

$$r^2 = \{r(1-r)\}^2 + 2r^2 - 2 \cdot r(1-r) \cdot \sqrt{2}r \cos\frac{\theta}{2}$$

$r^2 (>0)$ で割って整理すると $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{r^2 - 2r + 2}{2\sqrt{2}(1-r)}$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ より

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{r^2-2r+2}{2\sqrt{2}(1-r)} \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos\theta} = \frac{(1-r)^2+1}{2(1-r)} \quad \cdots③$$

ここで，$1-r=t$ とおくと ③ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{1+\cos\theta} = \dfrac{t^2+1}{2t}$ であり，②より $\sqrt{2}-1<t<1$ である。

2 乗して整理すると $\cos\theta = \dfrac{(t^2-1)^2}{4t^2}$

$f(t) = \dfrac{(t^2-1)^2}{4t^2}$ とおくと，

$$f'(t) = \frac{2(t^2-1)\cdot 2t \cdot 4t^2 - (t^2-1)^2 \cdot 8t}{16t^4} = \frac{t^4-1}{2t^3} = \frac{(t+1)(t-1)(t^2+1)}{2t^3}$$

$\sqrt{2}-1<t<1$ において $f'(t)<0$ であるから $f(t)$ はこの範囲で単調減少である。

$f\left(\sqrt{2}-1\right)=1$，$f(1)=0$ であるから $0<\cos\theta<1$ となる。

したがって $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。