[東京工業大学 1963 年 $\boxed{2}$]

$x>0,\ y>0,\ a>0$ のとき，$x+y \leqq 1+a,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)$ ならば $(2x-1)^2<4a(1+a)$ が成り立つことを示せ。

$x+y \leqq 1+a$ …①

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)$ …②

①より $y \leqq (1+a)-x$ …①´

②より $\dfrac{1}{y} \leqq 4(1+a)-\dfrac{1}{x}$ …②´

$y>0$ であるから ①´×②´ より

$$1 \leqq \{(1+a)-x\}\left\{4(1+a)-\frac{1}{x}\right\} \Leftrightarrow x \leqq \{(1+a)-x\}\{4(1+a)x-1\}$$

$$\Leftrightarrow x=4(1+a)^2x-4(1+a)x^2+(1+a)+x$$

$$\Leftrightarrow 4(1+a)x^2-4(1+a)^2x+(1+a) \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4(1+a)x+1 \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \leqq 4ax$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 \leqq 4ax \quad \cdots③$$

となる。

ここで，①より $x<x+y \leqq 1+a$ であるから③より $(2x-1)^2<4a(1+a)$ が成り立つ。