[東京工業大学 1963 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――☆

連立方程式 $x^3-y^3-z^3=3xyz,\ x^2=2(y+z)$ を満たす正の整数解を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――☆

$x^3-y^3-z^3-3xyz=x^3+(-y)^3+(-z)^3-3x(-y)(-z)$

$=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy)\ =0$ である。

ここで, $x,\ y,\ z>0$ のとき

$x^2+y^2+z^2-yz+zx+xy=\dfrac{1}{2}\{(y-z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\}>0$ であるから

$x-y-z=0$ すなわち $x=y+z$ となる。

このとき, $x^2=2(y+z)$ より $x^2=2x \Leftrightarrow x(x-2)=0$

$x>0$ より $x=2$ となり, $y+z=2$ かつ $y,\ z$ は正の整数なので $y=z=1$

逆に, $x=2,\ y=z=1$ は与えられた式を満たしている。

よって $x=2,\ y=z=1$

[別解]

$x^3-y^3-z^3=3xyz>0$ より $x>y,\ x>z$ であり, $x>1$ となる。

ここで, $x^2=2(y+z)<2(x+x)=4x$ より $x(x-4)<0$ から $0<x<4$

$x>1$ なので $x=2,\ 3$ であるが, $x^2=2(y+z)$ より x は偶数なので $x=2$

このとき, $x>y,\ x>z$ から $y=z=1$

逆に, $x=2,\ y=z=1$ は与えられた式を満たしている。

よって $x=2,\ y=z=1$