[東京工業大学 1962 年 $\boxed{1}$]

不等式 $0 \leqq n < m$ を満たす整数 m, n によって $5m+n$ の形に表されない正の整数を列挙せよ。

$m \geqq 5$ のときは $n=0, 1, 2, 3, 4$ なので，$5m+n$ の形によってすべての正の整数は表せる。

よって 25 以上の正の整数はすべて表せる。

したがって $m=1, 2, 3, 4$ のときを考える。

（ⅰ）$m=1$ のとき

$n=0$ となり，$5+n$ の形で表せるのは 5

（ⅱ）$m=2$ のとき

$n=0, 1$ となり，$10+n$ の形で表せるのは $10, 11$

（ⅲ）$m=3$ のとき

$n=0, 1, 2$ となり，$15+n$ の形で表せるのは $15, 16, 17$

（ⅳ）$m=4$ のとき

$n=0, 1, 2, 3$ となり，$20+n$ の形で表せるのは $20, 21, 22, 23$

したがって $5m+n$ の形に表されない正の整数は $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 18, 19, 24$

[東京工業大学 1962 年 $\boxed{2}$]

1 つの時計がある。その短針の先端と長針の先端との距離が 2 時には 4cm，2 時半には 6cm であった。4 時には両針の先端間の距離が何 cm となるか。その近似値を小数第 1 位まで求めよ。

長針の長さを x cm，短針の長さを y cm とする。

2 時のとき，長針と短針のなす角は 60° なので，余弦定理より

$$4^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ \iff x^2 + y^2 - xy = 16 \quad \cdots①$$

2 時半のとき，同様に 105° なので $6^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 105^\circ \quad \cdots②$

ここで，$\cos 105^\circ = \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right)$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

よって，② $\iff$ $x^2 + y^2 - \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}xy = 36 \quad \cdots③$ となる。

③－①より $\left(-\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right)xy = 20 \iff \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}\right)xy = 20$

$$\iff xy = \frac{40}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}$$

4 時のとき，長針と短針のなす角は 120° であり，両端の間の距離が ℓ であるとすると，

$$\ell^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ$$

$$= x^2 + y^2 + xy$$

$$= x^2 + y^2 - xy + 2xy$$

$$= 16 + 2\cdot\frac{40}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\left(\sqrt{6}+2-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2+\sqrt{2}}{8+4\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}{\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

よって $\ell^2 = 16+80 \cdot \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$$= 16+20\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$\fallingdotseq 36+20(1+1.732-1.414)$$

$$= 36+20 \times 1.318$$

$$= 42.36$$

$$\ell \fallingdotseq \sqrt{42.36} \fallingdotseq 6.50$$

したがって　$6.5\,\mathrm{cm}$

[東京工業大学 1962 年 $\boxed{3}$]

円 $x^2+y^2-4ax-2ay+20a-25=0$ は定数aの値のいかんにかかわらず 2 つの定点を通ることを証明せよ。また，この円と円 $x^2+y^2=5$ とが接するようにaの値を定めよ。

$x^2+y^2-4ax-2ay+20a-25=0$ …① ⇔ $(-4x-2y+20)a+x^2+y^2-25=0$

であり，$-4x-2y+20=0$ かつ $x^2+y^2-25=0$ を満たす$(x,\ y)$が存在すれば 2 つの定点を通ることになる。

実際，連立方程式を解くと $(x,\ y)=(5,\ 0),\ (3,\ 4)$ であるから，題意は示された。

また，① ⇔ $(x-2a)^2+(y-a)^2=5a^2-20a+25$ より

円①の中心は $(2a,\ a)$ すなわち直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上にある。

円 $x^2+y^2=5$ の中心は原点であるから，これと①とが接するとき，

接点は，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と 円 $x^2+y^2=5$ の交点に他ならない。

連立して解くと $x=\pm 2,\ y=\pm 1$（複号同順）である。

$(x,\ y)=(2,1)$ のとき，①より $a=2$

$(x,\ y)=(-2,-1)$ のとき，①より $a=\dfrac{2}{3}$

[東京工業大学 1962 年 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0 \leqq x < 2\pi,\ 0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $2\sin x + \sqrt{3}\cos x \sin y + \cos x \cos y$ の最大値，および最大値をあたえる $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x,\ y) = 2\sin x + \sqrt{3}\cos x \sin y + \cos x \cos y$ とおく。

$$f(x,\ y) = 2\sin x + 2\cos x\left(\sin y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos y \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sin x + 2\cos x \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$$

ここで，x を固定して考える。

（ｉ）$\cos x \geqq 0$ すなわち $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq x < 2\pi$ のとき

$f(x,\ y)$ が最大となるのは $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ のときで，$y + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ より $y = \dfrac{\pi}{3}$ のとき。

このとき，最大値は $f\left(x,\ \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin x + 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

次に x を変化させると $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のときに最大となり，このとき $x = \dfrac{\pi}{4}$

したがって $f(x,\ y)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ で，このとき $x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{3}$

（ⅱ）$\cos x < 0$ すなわち $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$f(x,\ y)$ が最大となるのは $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ のときで，$y + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}\pi$ より $y = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき。

このとき，最大値は $f\left(x,\ \dfrac{4}{3}\pi\right) = 2\sin x - 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

次に x を変化させると $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のときに最大となり，このとき $x = \dfrac{3}{4}\pi$

したがって $f(x,\ y)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ で，このとき $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ y = \dfrac{4}{3}\pi$

以上より $x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{3}$ または $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ y = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

[東京工業大学 1962 年 $\boxed{5}$]

h を正の定数とし， $f_0(x)=\cos x$, $f_n(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる関数列がある。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ の和を求めよ。

$f_0(x)=\cos x$ より

$$f_1(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f_0(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\cos t\,dt=\frac{1}{2h}\left\{\sin(x+h)-\sin(x-h)\right\}=\frac{\sin h}{h}\cos x$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f_1(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\frac{\sin h}{h}\cos t\,dt=\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cos x$$

帰納的に $f_n(x)=\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)^n\cos x$ であることがわかる。

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^n\cos x$

$$=\cos x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^n \quad \cdots①$$

ここで, $x>0$ のとき $y=x$ と $y=\sin x$ のグラフの大小関係より $\sin x<x$ であるから

$h>0$ に対して $0<\dfrac{\sin h}{h}<1$ となり，①の無限等比級数は収束する。

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\cos x\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\sin h}{h}}=\frac{h\cos x}{h-\sin h}$

[東京工業大学 1962 年 $\boxed{6}$]

$a \leqq x < b$ で，$f''(x) > 0$ ならば，$\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ は $a < x < b$ で増加することを示せ。

$g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ とおくと $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a) - \{f(x) - f(a)\}}{(x-a)^2}$ である。

$a < x < b$ において $g'(x) > 0$ であることを示す。

$h(x) = f'(x)(x-a) - \{f(x) - f(a)\}$ とおく。

$h'(x) = f''(x)(x-a) + f'(x) - f'(x) = f''(x)(x-a)$ であり

$a \leqq x < b$ で $f''(x) > 0$ であることから，$a < x < b$ で $h'(x) > 0$

よって $a < x < b$ で $h(x)$ は単調増加である。

$h(a) = 0$ であるから $a < x < b$ で $h(x) > 0$

よって $a < x < b$ で $g'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-a)^2} > 0$ より題意は示された。