[東京工業大学 1962 年 $\boxed{6}$]

☆ ☆

$a \leqq x < b$ で， $f''(x) > 0$ ならば， $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ は $a < x < b$ で増加することを示せ。

☆ ☆

$g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ とおくと $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)^2}$ である。

$a < x < b$ において $g'(x) > 0$ であることを示す。

$h(x) = f'(x)(x-a)-\{f(x)-f(a)\}$ とおく。

$h'(x) = f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x) = f''(x)(x-a)$ であり

$a \leqq x < b$ で $f''(x) > 0$ であることから， $a < x < b$ で $h'(x) > 0$

よって $a < x < b$ で $h(x)$ は単調増加である。

$h(a) = 0$ であるから $a < x < b$ で $h(x) > 0$

よって $a < x < b$ で $g'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-a)^2} > 0$ より題意は示された。