[東京工業大学 1962 年 $\boxed{5}$]

h を正の定数とし， $f_0(x)=\cos x,\ f_n(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる関数列がある。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ の和を求めよ。

$f_0(x)=\cos x$ より

$$f_1(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f_0(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\cos t\,dt=\frac{1}{2h}\{\sin(x+h)-\sin(x-h)\}=\frac{\sin h}{h}\cos x$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f_1(t)\,dt=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\frac{\sin h}{h}\cos t\,dt=\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\cos x$$

帰納的に $f_n(x)=\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)^n\cos x$ であることがわかる。

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^n\cos x$

$$=\cos x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^n \quad \cdots①$$

ここで， $x>0$ のとき $y=x$ と $y=\sin x$ のグラフの大小関係より $\sin x<x$ であるから

$h>0$ に対して $0<\dfrac{\sin h}{h}<1$ となり，①の無限等比級数は収束する。

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\cos x\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\sin h}{h}}=\frac{h\cos x}{h-\sin h}$