[東京工業大学 1962 年 $\boxed{4}$]

☆―――☆

$0 \leqq x < 2\pi,\ 0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $2\sin x + \sqrt{3}\cos x \sin y + \cos x \cos y$ の最大値，および最大値をあたえる $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――☆

$f(x,\ y) = 2\sin x + \sqrt{3}\cos x \sin y + \cos x \cos y$ とおく。

$$f(x,\ y) = 2\sin x + 2\cos x\left(\sin y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos y \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sin x + 2\cos x \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$$

ここで，x を固定して考える。

（i）$\cos x \geqq 0$ すなわち $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq x < 2\pi$ のとき

$f(x,\ y)$ が最大となるのは $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ のときで，$y + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ より $y = \dfrac{\pi}{3}$ のとき。

このとき，最大値は $f\left(x,\ \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin x + 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

次に x を変化させると $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のときに最大となり，このとき $x = \dfrac{\pi}{4}$

したがって $f(x,\ y)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ で，このとき $x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{3}$

（ii）$\cos x < 0$ すなわち $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$f(x,\ y)$ が最大となるのは $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ のときで，$y + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}\pi$ より $y = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき。

このとき，最大値は $f\left(x,\ \dfrac{4}{3}\pi\right) = 2\sin x - 2\cos x = 2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

次に x を変化させると $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ のときに最大となり，このとき $x = \dfrac{3}{4}\pi$

したがって $f(x,\ y)$ の最大値は $2\sqrt{2}$ で，このとき $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ y = \dfrac{4}{3}\pi$

以上より $x = \dfrac{\pi}{4},\ y = \dfrac{\pi}{3}$ または $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ y = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$