[東京工業大学 1962 年 $\boxed{3}$]

円 $x^2+y^2-4ax-2ay+20a-25=0$ は定数 a の値のいかんにかかわらず 2 つの定点を通ることを証明せよ。また，この円と円 $x^2+y^2=5$ とが接するように a の値を定めよ。

$x^2+y^2-4ax-2ay+20a-25=0$ …① $\Leftrightarrow$ $(-4x-2y+20)a+x^2+y^2-25=0$

であり，$-4x-2y+20=0$ かつ $x^2+y^2-25=0$ を満たす $(x,\ y)$ が存在すれば 2 つの定点を通ることになる。

実際，連立方程式を解くと $(x,\ y)=(5,\ 0),\ (3,\ 4)$ であるから，題意は示された。

また，① $\Leftrightarrow$ $(x-2a)^2+(y-a)^2=5a^2-20a+25$ より

円①の中心は $(2a,\ a)$ すなわち直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上にある。

円 $x^2+y^2=5$ の中心は原点であるから，これと①とが接するとき，

接点は，直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ と 円 $x^2+y^2=5$ の交点に他ならない。

連立して解くと $x=\pm 2,\ y=\pm 1$（複号同順）である。

$(x,\ y)=(2,1)$ のとき，①より $a=2$

$(x,\ y)=(-2,\ -1)$ のとき，①より $a=\dfrac{2}{3}$