[東京工業大学 1962 年 $\boxed{2}$]

☆―――☆

1 つの時計がある。その短針の先端と長針の先端との距離が 2 時には 4cm，2 時半には 6cm であった。4 時には両針の先端間の距離が何 cm となるか。その近似値を小数第 1 位まで求めよ。

☆―――☆

長針の長さを x cm，短針の長さを y cm とする。

2 時のとき，長針と短針のなす角は 60° なので，余弦定理より

$$4^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ \iff x^2 + y^2 - xy = 16 \quad \cdots①$$

2 時半のとき，同様に 105° なので $6^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 105^\circ \quad \cdots②$

ここで，$\cos 105^\circ = \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right)$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

よって，② $\iff$ $x^2 + y^2 - \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}xy = 36 \quad \cdots③$ となる。

③－①より $\left(-\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right)xy = 20 \iff \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}\right)xy = 20$

$$\iff xy = \frac{40}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}$$

4 時のとき，長針と短針のなす角は 120° であり，両端の間の距離が ℓ であるとすると，

$$\ell^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ$$

$$= x^2 + y^2 + xy$$

$$= x^2 + y^2 - xy + 2xy$$

$$= 16 + 2\cdot\frac{40}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\left(\sqrt{6}+2-\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+2+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2+\sqrt{2}}{8+4\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - 2\right)}{\left(\sqrt{6} + 2\right)\left(\sqrt{6} - 2\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

よって $\ell^2 = 16 + 80 \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

$$= 16 + 20\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

$$\fallingdotseq 36 + 20\left(1 + 1.732 - 1.414\right)$$

$$= 36 + 20 \times 1.318$$

$$= 42.36$$

$$\ell \fallingdotseq \sqrt{42.36} \fallingdotseq 6.50$$

したがって　$6.5\,\mathrm{cm}$