[東京工業大学 1961 年 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき，$p\cos ax+q\cos bx=1$ が 2 つの x の値，$u,\ v$ に対して成り立てば，$a=b=0$ であることを証明せよ。ただし $\dfrac{v}{u}$ は無理数とする。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$p>0,\ q>0$ より

$p\cos ax \leqq p$ 等号成立は $\cos ax=1$ のとき

$q\cos bx \leqq q$ 等号成立は $\cos bx=1$ のとき

が成り立つ。

よって $p\cos ax+q\cos bx \leqq p+q=1$ 等号成立は $\cos ax=1$ かつ $\cos bx=1$ のとき

である。

$x=u,\ x=v$ で $p\cos ax+q\cos bx=1$ が成り立つとすると

$\cos au=1,\ \cos bu=1,\ \cos av=1,\ \cos bv=1$ …①

となる。

①より $au=2\pi\times n_1,\ bu=2\pi\times m_1,\ av=2\pi\times n_2,\ bv=2\pi\times m_2$ （$n_1,\ m_1,\ n_2,\ m_2$ は整数）が成り立つ。

ここで，$a\neq 0$ とすると

①より $u=\dfrac{2\pi\times n_1}{a},\ v=\dfrac{2\pi\times n_2}{a}$ となるから $\dfrac{v}{u}=\dfrac{\dfrac{2\pi\times n_2}{a}}{\dfrac{2\pi\times n_1}{a}}=\dfrac{n_2}{n_1}$ となって

$\dfrac{v}{u}$ が無理数であることに矛盾する。よって $a=0$ である。

同様にして $b=0$ であることも示される。

よって題意は示された。

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ のグラフが 2 点 $(0,1),\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通り，かつ $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $|f(x)|\leqq 2$ であるとき a の値はどのような範囲にあるか。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ …① とおく。

①が $(0,1),\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通ることから

$f(0)=a+b=1$ より $b=1-a$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+c=1$ より $c=1-a$

よって①は $f(x)=a+(1-a)\cos x+(1-a)\sin x$

$$=a+(1-a)\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる。

ここで，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ なので $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ である。

$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で最大・最小をとるとすれば

それは $x=0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}$ のいずれかのときである。

したがって $|f(x)|\leqq 2 \Leftrightarrow |f(0)|\leqq 2$ かつ $\left|f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 2$ かつ $\left|f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\leqq 2$ …②

ここで，$f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ であるから ② $\Leftrightarrow \left|f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 2$

$$\Leftrightarrow \left|a+(1-a)\sqrt{2}\right|\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow -2\leqq a+(1-a)\sqrt{2}\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+3\sqrt{2}$$

したがって，求める a の範囲は $-\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+3\sqrt{2}$

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^2+y^2=1$ なるとき $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy$ を最大または最小とする $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^2+y^2=1$ より $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

このとき, $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+2\sqrt{3}\cos\theta\cdot\sin\theta$

$$=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$=2\left(\sin 2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\ \cdots①$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{25}{6}\pi$ であるから

①が最大となるのは $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$ のときで, このとき $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$ から

$x,\ y$ の値は $x=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

$x=\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=\sin\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$

①が最小となるのは $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ のときで, このとき $\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ から

$x,\ y$ の値は $x=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2},\ y=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2},\ y=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{4}$]

☆ ─── ☆

定線分 AB 上に任意の点 C をとり，AC, BC を直径とする 2 円の共通外接線を引いて，両円との接点をそれぞれ P, Q とするとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

☆ ─── ☆

AB を x 軸，AB の中点を原点 O にとり，直交座標を入れる。

$\mathrm{A}(k,\ 0),\ \mathrm{B}(-k,\ 0)$ とし，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ とする。$-k<t<k$ である。

AC, BC を直径とする 2 円の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2$，半径をそれぞれ $r_1,\ r_2$ とおく。

このとき，$\mathrm{O}_1\left(\dfrac{t-k}{2},\ 0\right),\ \mathrm{O}_2\left(\dfrac{t+k}{2},\ 0\right)$，$r_1=\dfrac{t+k}{2},\ r_2=\dfrac{k-t}{2}$ となる。

$t\neq 0$ のとき，直線 PQ は x 軸と交わるので，その点を D とし，$\angle\mathrm{QDO}=\theta$ とする。

対称性を考え，$0<t<k$ の範囲で考える。

このとき，$r_1>r_2$ であり，$\sin\theta=\dfrac{r_1-r_2}{\mathrm{O_1O_2}}=\dfrac{t}{k}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{k^2-t^2}}{k}$ である。

また，$\mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2$ の中点を N とすると，$\mathrm{MN}=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{k}{2}$

よって，（M の x 座標）＝（N の x 座標）＋$\mathrm{MN}\sin\theta$

$$=\frac{t}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{t}{k}$$
$$=t$$

（M の y 座標）$=\mathrm{MN}\cos\theta$

$$=\frac{k}{2}\cdot\frac{\sqrt{k^2-t^2}}{k}$$
$$=\frac{\sqrt{k^2-t^2}}{2}$$

したがって，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすれば

$\begin{cases} X=t \\ Y=\dfrac{\sqrt{k^2-t^2}}{2} \end{cases}$ であり，t を消去すると 楕円 $\dfrac{X^2}{k^2}+\dfrac{Y^2}{\frac{k^2}{4}}=1$ …① を得る。

$t=0$ のとき，$\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{k}{2}\right)$ となり，これは①上の点である。

$-k<t<0$ のときは対称性から同様に①を得る。

したがって求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{k^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{k^2}{4}}=1$ の $-k<x<k$ の範囲であるから

「AB を長軸とし，短軸の長さが $\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ である楕円の点 A, B を除いた部分」

である。

[**東京工業大学 1961 年 $\boxed{5}$**]

☆ ───────────────────────────── ☆

三次関数 $f(t)=t^3+pt^2+qt+r$ に対し，$2\int_0^x f(t)\,dt \leqq \int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt$ がすべての $x,\ y$ について成り立つという。このとき $f(t)$ の係数が満たすべき条件を求めよ。

☆ ───────────────────────────── ☆

$$\int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt-2\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x+y}+\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x-y}-2\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(x+y)^4+(x-y)^4-2x^4\right\}+\frac{1}{3}p\left\{(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3\right\}$$

$$+\frac{1}{2}p\left\{(x+y)^2+(x-y)^2-2x^2\right\}+r\left\{(x+y)+(x-y)-2x\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(12x^2y^2+2y^4\right)+\frac{1}{3}p\cdot 6xy^2+\frac{1}{2}q\cdot 2y^2$$

$$=y^2\left(3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\right)$$

となる。

よって，任意の $x,\ y$ に対して，$2\int_0^x f(t)\,dt \leqq \int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt$

$$\Leftrightarrow \quad y^2\left(3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\right)\geqq 0$$

$y^2\geqq 0$ であるから $3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\geqq 0$ …① となればよい。

① $\Leftrightarrow$ $3\left(x-\frac{p}{3}\right)^2-\frac{p^2}{3}+q+\frac{1}{2}y^2\geqq 0$ より，条件は $-\frac{p^2}{3}+q\geqq 0$ すなわち $p^2-3q\leqq 0$

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{6}$]

☆――――☆

すべての x に対して $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ なるとき，

(1) 方程式 $f(x)-x=0$ がただ 1 つの実根をもつことを証明せよ。

(2) この実根を α とするとき，無限数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ。

☆――――☆

(1) $g(x)=f(x)-x$ とおく。

$g'(x)=f'(x)-1$ であり，$-\dfrac{1}{2}<f'(x)<\dfrac{1}{2}$ なので $g'(x)<0$

よって $g(x)$ は単調減少であるから実数解をもつとすれば高々1 つである。

また，$-\dfrac{3}{2}<g'(x)<-\dfrac{1}{2}$ であり，

$x>0$ のとき，辺々を積分すると

$$\int_0^x\left(-\frac{3}{2}\right)dx<\int_0^x g'(x)\,dx<\int_0^x\left(-\frac{1}{2}\right)dx$$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{3}{2}x<g(x)-g(0)<-\dfrac{1}{2}x\ \ \cdots①$

$x<0$ のとき，同様にして $-\dfrac{3}{2}x>g(x)-g(0)>-\dfrac{1}{2}x\ \ \cdots②$

（ｉ）$g(0)=0$ のとき

$x=0$ が実数解として存在する。

（ⅱ）$g(0)>0$ のとき

$x=2g(0)$ を①の右側に代入すると $g(2g(0))-g(0)<-\dfrac{1}{2}\cdot 2g(0)$

$\Leftrightarrow\ g(2g(0))-g(0)<-g(0)$

$\Leftrightarrow\ g(2g(0))<0$

$x=\dfrac{2}{3}g(0)$ を①の左側に代入すると $-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}g(0)<g\left(\dfrac{2}{3}g(0)\right)-g(0)$

$$\Leftrightarrow \ g(0) < g\left(\frac{2}{3}g(0)\right) - g(0)$$

$$\Leftrightarrow \ 0 < g\left(\frac{2}{3}g(0)\right)$$

（ⅲ）$g(0) < 0$ のとき

②の不等式を利用すると，$g(2g(0)) > 0$ かつ $0 > g\left(\frac{2}{3}g(0)\right)$ が得られる。

以上より，$g(x)$ は連続関数であるので $x = 2g(0)$ と $x = \frac{2}{3}g(0)$ の間で $g(x) = 0$ となる。

よって $g(x) = f(x) - x = 0$ はただ１つの実根をもつ。

⑵

（ⅰ）ある n で $a_n = \alpha$ を満たせば $a_{n+1} = f(a_n) = \alpha$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる。

（ⅱ）どの a_n についても α と異なるとき

$$a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - \alpha \ \text{より} \ \left|\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha}\right| = \left|\frac{f(a_n) - \alpha}{a_n - \alpha}\right|$$

$$= \left|\frac{f(a_n) - f(\alpha)}{a_n - \alpha}\right| \ \cdots③$$

ここで，$f(x)$ はすべての x で微分可能なので

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ （$a < c < b$）を満たす実数 c が存在する。

$|f'(x)| < \frac{1}{2}$ であるから $\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| < \frac{1}{2}$ が成り立つ。

よって ③$< \frac{1}{2}$ が成り立つ。

したがって $|a_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|a_n - \alpha| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a_0 - \alpha|$ となり

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha| = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$ すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ。