[東京工業大学 1961 年 $\boxed{1}$]

$p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき，$p\cos ax+q\cos bx=1$ が 2 つの x の値，$u,\ v$ に対して成り立てば，$a=b=0$ であることを証明せよ。ただし $\dfrac{v}{u}$ は無理数とする。

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{2}$]

関数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ のグラフが 2 点 $(0, 1)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ を通り，かつ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $|f(x)| \leqq 2$ であるとき a の値はどのような範囲にあるか。

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{3}$]

$x^2+y^2=1$ なるとき $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy$ を最大または最小とする $x,\ y$ の値を求めよ。

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{4}$]

☆―――☆

定線分 AB 上に任意の点 C をとり，AC, BC を直径とする 2 円の共通外接線を引いて，両円との接点をそれぞれ P, Q とするとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

☆―――☆

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{5}$]

三次関数 $f(t)=t^3+pt^2+qt+r$ に対し，$2\int_0^x f(t)\,dt \leqq \int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt$ がすべての $x,\ y$ について成り立つという。このとき $f(t)$ の係数が満たすべき条件を求めよ。

[東京工業大学 1961 年 $\boxed{6}$]

すべての x に対して $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ なるとき，

(1) 方程式 $f(x)-x=0$ がただ 1 つの実根をもつことを証明せよ。

(2) この実根を α とするとき，無限数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ が成り立つことを証明せよ。