[東京工業大学 1961 年 $\boxed{6}$]

すべての x に対して $|f'(x)|<\dfrac{1}{2}$ なるとき，

(1) 方程式 $f(x)-x=0$ がただ 1 つの実根をもつことを証明せよ。

(2) この実根を α とするとき，無限数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ。

---

(1) $g(x)=f(x)-x$ とおく。

$g'(x)=f'(x)-1$ であり，$-\dfrac{1}{2}<f'(x)<\dfrac{1}{2}$ なので $g'(x)<0$

よって $g(x)$ は単調減少であるから実数解をもつとすれば高々1 つである。

また，$-\dfrac{3}{2}<g'(x)<-\dfrac{1}{2}$ であり，

$x>0$ のとき，辺々を積分すると

$$\int_0^x\left(-\frac{3}{2}\right)dx<\int_0^x g'(x)\,dx<\int_0^x\left(-\frac{1}{2}\right)dx$$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{3}{2}x<g(x)-g(0)<-\dfrac{1}{2}x\ \ \cdots①$

$x<0$ のとき，同様にして $-\dfrac{3}{2}x>g(x)-g(0)>-\dfrac{1}{2}x\ \ \cdots②$

（ｉ）$g(0)=0$ のとき

$x=0$ が実数解として存在する。

（ⅱ）$g(0)>0$ のとき

$x=2g(0)$ を①の右側に代入すると $g(2g(0))-g(0)<-\dfrac{1}{2}\cdot 2g(0)$

$\Leftrightarrow\ g(2g(0))-g(0)<-g(0)$

$\Leftrightarrow\ g(2g(0))<0$

$x=\dfrac{2}{3}g(0)$ を①の左側に代入すると $-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}g(0)<g\left(\dfrac{2}{3}g(0)\right)-g(0)$

$$\Leftrightarrow\ g(0)<g\left(\frac{2}{3}g(0)\right)-g(0)$$

$$\Leftrightarrow\ 0<g\left(\frac{2}{3}g(0)\right)$$

（iii）$g(0)<0$ のとき

②の不等式を利用すると， $g(2g(0))>0$ かつ $0>g\left(\frac{2}{3}g(0)\right)$ が得られる。

以上より， $g(x)$ は連続関数であるので $x=2g(0)$ と $x=\frac{2}{3}g(0)$ の間で $g(x)=0$ となる。

よって $g(x)=f(x)-x=0$ はただ 1 つの実根をもつ。

(2)

（i）ある n で $a_n=\alpha$ を満たせば $a_{n+1}=f(a_n)=\alpha$ より $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ となる。

（ii）どの a_n についても α と異なるとき

$$a_{n+1}-\alpha=f(a_n)-\alpha \quad \text{より} \quad \left|\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_n-\alpha}\right|=\left|\frac{f(a_n)-\alpha}{a_n-\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha}\right| \quad \cdots③$$

ここで， $f(x)$ はすべての x で微分可能なので

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ （$a<c<b$）を満たす実数 c が存在する。

$|f'(x)|<\frac{1}{2}$ であるから $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|<\frac{1}{2}$ が成り立つ。

よって ③$<\frac{1}{2}$ が成り立つ。

したがって $|a_{n+1}-\alpha|<\frac{1}{2}|a_n-\alpha|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a_0-\alpha|$ となり

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|a_0-\alpha|=0$ であるから $\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$ すなわち $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が成り立つ。