[東京工業大学 1961 年 $\boxed{5}$]

三次関数 $f(t)=t^3+pt^2+qt+r$ に対し，$2\int_0^x f(t)\,dt \leqq \int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt$ がすべての $x,\ y$ について成り立つという。このとき $f(t)$ の係数が満たすべき条件を求めよ。

$$\int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt-2\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x+y}+\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x-y}-2\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}pt^3+\frac{1}{2}qt^2+rt\right]_0^{x}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(x+y)^4+(x-y)^4-2x^4\right\}+\frac{1}{3}p\left\{(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3\right\}$$

$$+\frac{1}{2}p\left\{(x+y)^2+(x-y)^2-2x^2\right\}+r\left\{(x+y)+(x-y)-2x\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(12x^2y^2+2y^4\right)+\frac{1}{3}p\cdot 6xy^2+\frac{1}{2}q\cdot 2y^2$$

$$=y^2\left(3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\right)$$

となる。

よって，任意の $x,\ y$ に対して，$2\int_0^x f(t)\,dt \leqq \int_0^{x+y} f(t)\,dt+\int_0^{x-y} f(t)\,dt$

$$\Leftrightarrow \quad y^2\left(3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\right)\geqq 0$$

$y^2\geqq 0$ であるから $3x^2+2px+q+\frac{1}{2}y^2\geqq 0$ …① となればよい。

① $\Leftrightarrow$ $3\left(x-\frac{p}{3}\right)^2-\frac{p^2}{3}+q+\frac{1}{2}y^2\geqq 0$ より，条件は $-\frac{p^2}{3}+q\geqq 0$ すなわち $p^2-3q\leqq 0$