[東京工業大学 1961 年 $\boxed{4}$]

定線分ABト上に任意の点Cをとり，AC, BCを直径とする 2 円の共通外接線を引いて，両円との接点をそれぞれP, Qとするとき，線分PQの中点Mの軌跡を求めよ。

ABをx軸，ABの中点を原点Oにとり，直交座標を入れる。

$\mathrm{A}(k,0),\ \mathrm{B}(-k,0)$とし，$\mathrm{C}(t,0)$とする。$-k<t<k$ である。

AC, BCを直径とする2円の中心をそれぞれ $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$，半径をそれぞれ r_1, r_2 とおく。

このとき，$\mathrm{O}_1\left(\dfrac{t-k}{2},\ 0\right), \mathrm{O}_2\left(\dfrac{t+k}{2},\ 0\right)$ ，$r_1=\dfrac{t+k}{2},\ r_2=\dfrac{k-t}{2}$ となる。

$t\neq 0$のとき，直線PQはx軸と交わるので，その点をDとし，$\angle\mathrm{QDO}=\theta$とする。

対称性を考え，$0<t<k$ の範囲で考える。

このとき，$r_1>r_2$ であり，$\sin\theta=\dfrac{r_1-r_2}{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}=\dfrac{t}{k}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{k^2-t^2}}{k}$ である。

また，$\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$の中点をNとすると，$\mathrm{MN}=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{k}{2}$

よって，（Mのx座標）＝（Nのx座標）＋$\mathrm{MN}\sin\theta$

$$=\frac{t}{2}+\frac{k}{2}\cdot\frac{t}{k}$$

$$=t$$

（Mのy座標）$=\mathrm{MN}\cos\theta$

$$=\frac{k}{2}\cdot\frac{\sqrt{k^2-t^2}}{k}$$

$$=\frac{\sqrt{k^2-t^2}}{2}$$

したがって，$\mathrm{M}(X, Y)$ とすれば

$\begin{cases} X=t \\ Y=\dfrac{\sqrt{k^2-t^2}}{2} \end{cases}$ であり，t を消去すると 楕円 $\dfrac{X^2}{k^2}+\dfrac{Y^2}{\frac{k^2}{4}}=1$ …① を得る。

$t=0$ のとき，$\mathrm{M}\left(0,\ \dfrac{k}{2}\right)$ となり，これは①上の点である。

$-k<t<0$ のときは対称性から同様に①を得る。

したがって求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{k^2}+\dfrac{y^2}{\frac{k^2}{4}}=1$ の $-k<x<k$ の範囲であるから

「AB を長軸とし，短軸の長さが $\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ である楕円の点 A, B を除いた部分」

である。