[東京工業大学 1961 年 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^2+y^2=1$ なるとき $x^2-y^2+2\sqrt{3}xy$ を最大または最小とする $x,\ y$ の値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$x^2+y^2=1$ より $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

このとき，$x^2-y^2+2\sqrt{3}xy=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2+2\sqrt{3}\cos\theta\cdot\sin\theta$

$$=\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta$$

$$=2\left(\sin 2\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\quad\cdots①$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{25}{6}\pi$ であるから

①が最大となるのは $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$ のときで，このとき $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$ から

$x,\ y$ の値は $x=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

$x=\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ y=\sin\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$

①が最小となるのは $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$ のときで，このとき $\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ から

$x,\ y$ の値は $x=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2},\ y=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2},\ y=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$