[ 東京工業大学 1961 年 $\boxed{2}$ ]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

関数 $f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ のグラフが 2 点 $(0,1),\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通り，かつ $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $|f(x)|\leqq 2$ であるとき $a$ の値はどのような範囲にあるか。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=a+b\cos x+c\sin x$ …① とおく。

①が $(0,1),\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通ることから

$f(0)=a+b=1$ より $b=1-a$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+c=1$ より $c=1-a$

よって①は $f(x)=a+(1-a)\cos x+(1-a)\sin x$

$$=a+(1-a)\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる。

ここで，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ なので $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ である。

$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で最大・最小をとるとすれば

それは $x=0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}$ のいずれかのときである。

したがって $|f(x)|\leqq 2 \Leftrightarrow |f(0)|\leqq 2$ かつ $\left|f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 2$ かつ $\left|f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\leqq 2$ …②

ここで，$f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ であるから ② $\Leftrightarrow \left|f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 2$

$$\Leftrightarrow \left|a+(1-a)\sqrt{2}\right|\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow -2\leqq a+(1-a)\sqrt{2}\leqq 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+3\sqrt{2}$$

したがって，求める $a$ の範囲は $-\sqrt{2}\leqq a\leqq 4+3\sqrt{2}$