[東京工業大学 1961 年 $\boxed{1}$]

$p>0,\ q>0,\ p+q=1$ のとき，$p\cos ax+q\cos bx=1$ が 2 つの x の値，$u,\ v$ に対して成り立てば，$a=b=0$ であることを証明せよ。ただし $\dfrac{v}{u}$ は無理数とする。

$p>0,\ q>0$ より

$p\cos ax \leqq p$ 等号成立は $\cos ax=1$ のとき

$q\cos bx \leqq q$ 等号成立は $\cos bx=1$ のとき

が成り立つ。

よって $p\cos ax+q\cos bx \leqq p+q=1$ 等号成立は $\cos ax=1$ かつ $\cos bx=1$ のとき

である。

$x=u,\ x=v$ で $p\cos ax+q\cos bx=1$ が成り立つとすると

$\cos au=1,\ \cos bu=1,\ \cos av=1,\ \cos bv=1$ …①

となる。

①より $au=2\pi\times n_1,\ bu=2\pi\times m_1,\ av=2\pi\times n_2,\ bv=2\pi\times m_2$（$n_1,\ m_1,\ n_2,\ m_2$ は整数）が成り立つ。

ここで，$a\neq 0$ とすると

①より $u=\dfrac{2\pi\times n_1}{a},\ v=\dfrac{2\pi\times n_2}{a}$ となるから $\dfrac{v}{u}=\dfrac{\dfrac{2\pi\times n_2}{a}}{\dfrac{2\pi\times n_1}{a}}=\dfrac{n_2}{n_1}$ となって

$\dfrac{v}{u}$ が無理数であることに矛盾する。よって $a=0$ である。

同様にして $b=0$ であることも示される。

よって題意は示された。