[東京工業大学 1960 年 数学Ⅲ $\boxed{2}$]

$a \leqq x \leqq b$ $(a<b)$ で $f(x)>0$ のとき，$N=\int_a^b f(x)\,dx$，$v(t)=\dfrac{1}{N}\int_a^b (x-t)^2 f(x)\,dx$ とおく。

$v(t)$ を最小にする t の値を M とする。

(1) M を求めよ。

(2) $v(t)-v(M)=(t-M)^2$ であることを示せ。

---

(1) $$v(t)=\frac{1}{N}\int_a^b (x-t)^2 f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\int_a^b (x^2-2tx+t^2) f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\left\{\int_a^b x^2 f(x)\,dx-2t\int_a^b xf(x)\,dx+t^2\int_a^b f(x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\frac{2t}{N}\int_a^b xf(x)\,dx+t^2$$

$$=\left(t-\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2-\left(\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+\frac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx \quad \cdots①$$

よって，$v(t)$ を最小にする t は $M=\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx$ である。

(2) $v(M)=-\left(\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+\dfrac{1}{N}\int_a^b x^2 f(x)\,dx$ であるから

①より $v(t)=\left(t-\dfrac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2+v(M)$ なので

$$v(t)-v(M)=\left(t-\frac{1}{N}\int_a^b xf(x)\,dx\right)^2$$

$=(t-M)^2$ となる。